

# 圏と表現論 演習問題

@naughiez

## Contents

<b>1</b>	<b>圏</b>	<b>1</b>
1.1	モノイドと圏	2
1.2	モノイド準同型と函手	4
1.3	自然変換	5
1.4	圏の同型と同値	8
1.5	多元環と線型圏	9
1.6	多元環の準同型と線形函手	12



## 第1章 圏

### § 1.1 モノイドと圏

#### PROBLEM 1.1.2

$(G, \mu, 1)$  がモノイドならば  $(G, \mu^{\text{op}}, 1)$  もモノイドとなることを示せ。ただし,

$$\mu^{\text{op}}(x, y) := \mu(y, x) \quad (x, y \in G).$$

*Proof.* 結合律の公理は各  $x, y, z \in G$  に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\text{op}}(\mu^{\text{op}}(x, y), z) &= \mu^{\text{op}}(\mu(y, x), z) \\ &= \mu(z, \mu(y, x)) \\ &= \mu(\mu(z, y), x) \\ &= \mu^{\text{op}}(x, \mu^{\text{op}}(y, z)) \end{aligned}$$

と確認できる。単位元は明らか。 □

#### PROBLEM 1.1.5

$(G, \mu, 1, \iota)$  が群ならば  $(G, \mu^{\text{op}}, 1, \iota)$  も群となることを示せ。

*Proof.* **PROBLEM 1.1.2** より  $(G, \mu^{\text{op}}, 1)$  はモノイドである。  $\iota$  がこの反転モノイド  $G^{\text{op}}$  の逆元を与えることを言えばよく、それは任意の  $x \in G$  に対して

$$\begin{aligned} \mu^{\text{op}}(x, \iota(x)) &= \mu(\iota(x), x) = 1, \\ \mu^{\text{op}}(\iota(x), x) &= \mu(x, \iota(x)) = 1 \end{aligned}$$

となることから分かる。 □

**PROBLEM 1.1.11**

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \text{dom}, \text{cod}, \circ, \text{id})$  が圏ならば  $\mathcal{C}^{\text{op}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \text{cod}, \text{dom}, \circ^{\text{op}}, \text{id})$  も圏となることを示せ。ただし，圏  $\mathcal{C}$  内で合成可能な射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$f \circ^{\text{op}} g := g \circ f.$$

*Proof.* 結合律：圏  $\mathcal{C}$  の射

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

に対して

$$\begin{aligned} (f \circ^{\text{op}} g) \circ^{\text{op}} h &= h \circ (g \circ f) \\ &= (h \circ g) \circ f \\ &= f \circ^{\text{op}} (g \circ^{\text{op}} h). \end{aligned}$$

単位律：圏  $\mathcal{C}$  の射  $f \in \mathcal{C}(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \text{id}_x \circ^{\text{op}} f &= f \circ \text{id}_x = f, \\ f \circ^{\text{op}} \text{id}_y &= \text{id}_y \circ f = f. \end{aligned}$$

□

**PROBLEM 1.1.24**

小集合の圏  $\text{Set}$  において，集合の直積が積で非交和が余積となることを示せ。

*Proof.*  $I$  を小集合， $(X_i)_{i \in I}$  を小集合の族とする。

直積が積：

$X := \prod_{i \in I} X_i$  とおく。各  $i \in I$  について  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  を標準射影とする。

小集合  $Y$  と写像の族  $(\rho_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  が与えられたとき，写像  $f : Y \rightarrow X$  が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \rho_i & \swarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

は各  $i \in I$  について可換になる.

逆にある写像  $g: Y \rightarrow X$  存在してすべての  $i \in I$  に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より,  $g(y)$  の第  $i$  成分と  $f(y)$  の第  $i$  成分は各  $i \in I$  で等しくなり,  $g(y) = f(y)$  が言える. よって  $g = f$ .

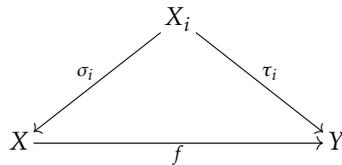
非交和が余積:

$X := \bigsqcup_{i \in I} X_i$  とおく. 各  $i \in I$  について  $\sigma_i: X_i \rightarrow X$  を標準入射とする.

小集合  $Y$  と写像の族  $(\tau_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  が与えられたとき, 写像  $f: X \rightarrow Y$  が

$$f(x) := \tau_i(x) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

によって定まる. このとき図式



は各  $i \in I$  について可換になる.

逆にある写像  $g: X \rightarrow Y$  が存在してすべての  $i \in I$  に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より, 任意の  $x \in X$  に対して  $g(x) = f(x)$  となる. よって  $g = f$ . □

## § 1.2 モノイド準同型と関手

### PROBLEM 1.2.5

$\mathcal{C}$  を局所小圏とし,  $x \in \mathcal{C}_0$  とする. このとき次を示せ.

i) 関手  $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  が

- ・ 対象:  $y \mapsto \mathcal{C}(x, y)$ ,
- ・ 射:  $f \mapsto \mathcal{C}(x, f)$ , ただし射  $f \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して

$$\mathcal{C}(x, f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g,$$

によって定義できる.

ii) 関手  $\mathcal{C}(-, x): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  が

- ・ 対象:  $y \mapsto \mathcal{C}(y, x)$ ,
- ・ 射:  $f \mapsto \mathcal{C}(f, x)$ , ただし射  $f \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して

$$\mathcal{C}(f, x): \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(y, x), \quad g \mapsto g \circ f,$$

によって定義できる.

iii) 関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  に対して, 関手  $F^{\text{op}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$  が

・ 対象:  $y \mapsto F(y)$ ,

・ 射:  $f \mapsto F(f)$

によって定義できる.

*Proof.* (i)  $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  がクイバー射で各対象  $y \in \mathcal{C}_0$  に対して  $\mathcal{C}(x, \text{id}_y) = \text{id}_{\mathcal{C}(x,y)}$  であることは明らか.  
圏  $\mathcal{C}$  の射

$$y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{g} w$$

を考える. 射  $\mathcal{C}(x, g \circ f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, w)$  は  $h \mapsto (g \circ f) \circ h$  で与えられる.

他方の射  $\mathcal{C}(x, g) \circ \mathcal{C}(x, f): \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, w)$  は  $h \mapsto f \circ h \mapsto g \circ (f \circ h)$  で与えられる.

圏  $\mathcal{C}$  における結合律  $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$  より, この二つの射は一致する:

$$\mathcal{C}(x, g \circ f) = \mathcal{C}(x, g) \circ \mathcal{C}(x, f).$$

以上より, クイバー射  $\mathcal{C}(x, -)$  は関手となる.

(ii)  $\mathcal{C}(-, x) = \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -)$  である.

(iii) 射  $f \in \mathcal{C}^{\text{op}}(y, z)$  に対して  $F^{\text{op}}(f) \in \mathcal{D}^{\text{op}}(F^{\text{op}}(y), F^{\text{op}}(z))$  となることはすぐに分かる. また, 圏  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  の各対象  $y \in \mathcal{C}_0^{\text{op}}$  について  $F^{\text{op}}(\text{id}_y) = \text{id}_{F^{\text{op}}(y)}$  も明らか. 結合律は,

$$\begin{aligned} F^{\text{op}}(g \circ^{\text{op}} f) &= F(g \circ^{\text{op}} f) \\ &= F(f \circ g) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F^{\text{op}}(g) \circ^{\text{op}} F^{\text{op}}(f) \end{aligned}$$

と確かめられる. □

### § 1.3 自然変換

#### PROBLEM 1.3.3

$\mathcal{C}$  を局所小圏とし,  $f: x \rightarrow y$  を圏  $\mathcal{C}$  の射とする. このとき次を示せ.

i) 射の族

$$\mathcal{C}(f, -) := (\mathcal{C}(f, z): \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z))_{z \in \mathcal{C}_0}$$

は自然変換  $\mathcal{C}(f, -): \mathcal{C}(y, -) \rightarrow \mathcal{C}(x, -)$  を定める. ただし,  $\mathcal{C}(x, -)$  や  $\mathcal{C}(y, -)$  は **PROBLEM 1.2.5**

(i) の共変表現関手である.

ii) 射の族

$$\mathcal{C}(-, f) := (\mathcal{C}(z, f) : \mathcal{C}(z, x) \rightarrow \mathcal{C}(z, y))_{z \in \mathcal{C}_0}$$

は自然変換  $\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, x) \rightarrow \mathcal{C}(-, y)$  を定める。ただし,  $\mathcal{C}(-, x)$  や  $\mathcal{C}(-, y)$  は **PROBLEM 1.2.5** (ii) の反変表現関手である。

*Proof.* (i) 圏  $\mathcal{C}$  の任意の射  $g : z \rightarrow w$  を取る。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(y, z) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, z)} & \mathcal{C}(x, z) \\ \mathcal{C}(y, g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(x, g) \\ \mathcal{C}(y, w) & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, w)} & \mathcal{C}(x, w) \end{array}$$

が可換であることを示せばよい。

任意の射  $h \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して

$$\begin{array}{ccc} h & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, z)} & h \circ f \\ \mathcal{C}(y, g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(x, g) \\ g \circ h & \xrightarrow{\mathcal{C}(f, w)} & (g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) \end{array}$$

となるから,  $\mathcal{C}(f, -) : \mathcal{C}(y, -) \rightarrow \mathcal{C}(x, -)$  は自然変換である。

(ii)  $\mathcal{C}(-, f) = \mathcal{C}^{\text{op}}(f, -) : \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -) \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}(y, -)$  である。 □

### PROBLEM 1.3.4

$\mathcal{C}$  を圏,  $I$  を集合とし  $(x_i)_{i \in I}$  を圏  $\mathcal{C}$  の対象の族とする。このとき次の自然同型が得られることを示せ :

$$(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I} := ((\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I})_{z \in \mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(-, \prod_{i \in I} x_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(-, x_i),$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i, -))_{i \in I} := ((\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I})_{z \in \mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(\prod_{i \in I} x_i, -\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, -).$$

ただし, 各  $\pi_j : \prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_j$  と  $\sigma_j : x_j \rightarrow \prod_{i \in I} x_i$  はそれぞれ積の射影族と余積の入射族であり, また各対象  $z \in \mathcal{C}_0$  に対して

$$(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I} : \mathcal{C}\left(z, \prod_{i \in I} x_i\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(z, x_i), \quad f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I},$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I} : \mathcal{C}\left(\prod_{i \in I} x_i, z\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, z), \quad f \mapsto (f \circ \sigma_i)_{i \in I}$$

と定義する。

Proof. 積が直積に写ること :

各  $(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}$  が同型射であることはすでに示されている (注意 1.1.26). よって,  $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$  が自然変換となることを示せばよい.

圏  $\mathcal{C}$  の任意の射  $f \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(z, \prod_{i \in I} x_i) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(z, x_i) \\ \downarrow \mathcal{C}(f, \prod_{i \in I} x_i) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(f, x_i) \\ \mathcal{C}(y, \prod_{i \in I} x_i) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(y, \pi_i))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(y, x_i) \end{array}$$

を考えると, 各射  $g \in \mathcal{C}(z, \prod_{i \in I} x_i)$  に対して

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}} & (\pi_i \circ g)_{i \in I} \\ \downarrow \mathcal{C}(f, \prod_{i \in I} x_i) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(f, x_i) \\ g \circ f & \xrightarrow{(\mathcal{C}(y, \pi_i))_{i \in I}} & (\pi_i \circ (g \circ f))_{i \in I} \quad \text{---} \quad ((\pi_i \circ g) \circ f)_{i \in I} \end{array}$$

となるから, 上の図式は可換である. 従って  $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$  は自然同型.

余積が直積に写ること :

各  $(\mathcal{C}(z, \pi_i))_{i \in I}$  が同型射であることはすでに示されている (注意 1.1.26). よって,  $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$  が自然変換となることを示せばよい.

圏  $\mathcal{C}$  の任意の射  $f \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\prod_{i \in I} x_i, y) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, y))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, y) \\ \downarrow \mathcal{C}(\prod_{i \in I} x_i, f) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, f) \\ \mathcal{C}(\prod_{i \in I} x_i, z) & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I}} & \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, z) \end{array}$$

を考えると, 各射  $g \in \mathcal{C}(\prod_{i \in I} x_i, y)$  に対して

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, y))_{i \in I}} & (g \circ \sigma_i)_{i \in I} \\ \downarrow \mathcal{C}(\prod_{i \in I} x_i, f) & & \downarrow \prod_{i \in I} \mathcal{C}(x_i, f) \\ f \circ g & \xrightarrow{(\mathcal{C}(\sigma_i, z))_{i \in I}} & ((f \circ g) \circ \sigma_i)_{i \in I} \quad \text{---} \quad (f \circ (g \circ \sigma_i))_{i \in I} \end{array}$$

となるから, 上の図式は可換である. 従って  $(\mathcal{C}(-, \pi_i))_{i \in I}$  は自然同型. □

## § 1.4 圏の同型と同値

### PROBLEM 1.4.5

$F = (F_0, F_1): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を圏の間の関手とすると、次は同値であることを示せ：

- i) 関手  $F$  は同型；
- ii) 写像  $F_0: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  と  $F_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  はともに全単射。

*Proof.* (i)  $\implies$  (ii) 関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が同型だから、関手  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が存在して  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$  および  $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$  が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= (G \circ F)_0 = (\text{id}_{\mathcal{C}})_0 = \text{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= (F \circ G)_0 = (\text{id}_{\mathcal{D}})_0 = \text{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= (G \circ F)_1 = (\text{id}_{\mathcal{C}})_1 = \text{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= (F \circ G)_1 = (\text{id}_{\mathcal{D}})_1 = \text{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

であるから、写像  $F_0: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  と  $F_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  はともに全単射。

(ii)  $\implies$  (i) 写像  $F_0: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  と  $F_1: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$  がともに全単射ならば、写像  $G_0: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$  と  $G_1: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  が存在して

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= \text{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= \text{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= \text{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= \text{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

このとき  $G = (G_0, G_1): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  は関手である。実際、各恒等射  $\text{id}_x \in \mathcal{D}(x, x)$  に対して

$$\text{id}_{G_0(x)} = (G_1 \circ F_1)(\text{id}_{G_0(x)}) = G_1(\text{id}_{F_0(G_0(x))}) = G_1(\text{id}_x)$$

となり、また圏  $\mathcal{D}$  の射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$\begin{aligned} F_1 \circ G_1(g \circ f) &= g \circ f = (F_1 \circ G_1(g)) \circ (F_1 \circ G_1(f)) \\ &= F_1(G_1(g) \circ G_1(f)) \end{aligned}$$

より

$$G_1(g \circ f) = G_1(g) \circ G_1(f)$$

を得る。

この関手  $G$  が  $F$  の逆となっていることは、写像  $G_0$  と  $G_1$  の定義から分かる。 □

## § 1.5 多元環と線型圏

$\mathbb{k}$  を体とする。(可換環でもよい.)

### PROBLEM 1.5.8

$\mathbb{k}$  上ベクトル空間の圏  $\text{Mod}(\mathbb{k})$  において, ベクトル空間の直積が積で直和が余積となることを示せ.

*Proof.*  $I$  を小集合,  $(X_i)_{i \in I}$  をベクトル空間の族とする.

直積が積:

$X := \prod_{i \in I} X_i$  とおく. 各  $i \in I$  について  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  を標準射影とする.

ベクトル空間  $Y$  と線形写像の族  $(\rho_i: Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  が与えられたとき, 線形写像  $f: Y \rightarrow X$  が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる. このとき図式

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \rho_i & \swarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

は各  $i \in I$  について可換になる.

逆にある線形写像  $g: Y \rightarrow X$  存在してすべての  $i \in I$  に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より,  $g(y)$  の第  $i$  成分と  $f(y)$  の第  $i$  成分は各  $i \in I$  で等しくなり,  $g(y) = f(y)$  が言える. よって  $g = f$ .

直和が余積:

$X := \coprod_{i \in I} X_i$  とおく. 各  $i \in I$  について  $\sigma_i: X_i \rightarrow X$  を標準入射とする.

ベクトル空間  $Y$  と線形写像の族  $(\tau_i: X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$  が与えられたとき, 線形写像  $f: X \rightarrow Y$  が

$$f(x) := \sum_{i \in I} \tau_i(x_i) \quad (x \in X)$$

によって定まる. このとき図式

$$\begin{array}{ccc} & X_i & \\ \sigma_i \swarrow & & \searrow \tau_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

は各  $i \in I$  について可換になる.

逆にある線形写像  $g: X \rightarrow Y$  が存在してすべての  $i \in I$  に対して上の図式を可換にできたならば, 等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より, 任意の  $x \in X$  に対して  $g(x) = \sum_{i \in I} g(\sigma_i(x_i)) = \sum_{i \in I} f(\sigma_i(x_i)) = f(x)$  となる. よって  $g = f$ .  $\square$

**PROBLEM 1.5.12**

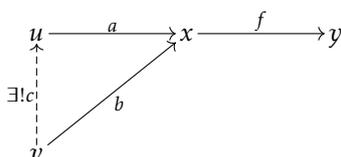
$\mathcal{C}$  を  $\mathbb{k}$  線形圏,  $f: x \rightarrow y$  をその射とする. このとき次を示せ.

- i)  $a: u \rightarrow x$  と  $b: v \rightarrow x$  がともに射  $f$  の核ならば,  $b = a \circ c$  なる射  $c: v \rightarrow u$  がただ一つ存在する. そこで  $f$  の核を  $\ker f: \text{Ker } f \rightarrow x$  と書くとき,  $\ker f$  はモノ射である.
- ii)  $a: y \rightarrow u$  と  $b: y \rightarrow v$  がともに射  $f$  の余核ならば,  $b = c \circ a$  なる射  $c: u \rightarrow v$  がただ一つ存在する. そこで  $f$  の余核を  $\text{coker } f: \text{Coker } f \rightarrow x$  と書くとき,  $\text{coker } f$  はエピ射である.

*Proof.* (i)

核の一意性:

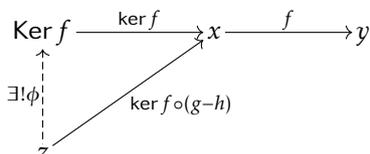
次の図式を考える:



核  $b$  の定義から  $f \circ b = 0$  となる. よって核  $a$  の普遍性より, ただ一つの射  $c: v \rightarrow u$  が存在して  $b = a \circ c$  とできる.

核がモノ射であること:

圏  $\mathcal{C}$  の射  $g, h: z \rightarrow \text{Ker } f$  が  $\ker f \circ g = \ker f \circ h$  を満たすとする. このとき射の合成  $\circ: \mathcal{C}(\text{Ker } f, x) \times \mathcal{C}(z, \text{Ker } f) \rightarrow \mathcal{C}(z, x)$  の双線形性より,  $\ker f \circ (g - h) = 0$  となる.

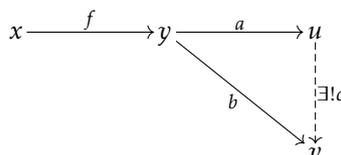


すると射  $\phi = g - h$  と  $\phi = 0$  はともに  $\ker f \circ \phi = \ker f \circ (g - h)$  を満たすから, 核の普遍性から  $g - h = 0$  が従う. よって  $g = h$ .

(ii)

余核の一意性:

次の図式を考える:



余核  $b$  の定義から  $b \circ f = 0$  となる. よって余核  $a$  の普遍性より, ただ一つの射  $c: u \rightarrow v$  が存在して  $b = c \circ a$  とできる.

余核がエピ射であること:

圏  $\mathcal{C}$  の射  $g, h: \text{Coker } f \rightarrow z$  が  $g \circ \text{coker } f = h \circ \text{coker } f$  を満たすとする. このとき射の合成  $\circ: \mathcal{C}(\text{Coker } f, z) \times \mathcal{C}(y, \text{Coker } f) \rightarrow \mathcal{C}(y, z)$  の双線形性より,  $(g - h) \circ \text{coker } f = 0$  となる.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{f} & y & \xrightarrow{\text{coker } f} & \text{Coker } f \\
 & & & \searrow & \downarrow \exists! \phi \\
 & & & & z \\
 & & & \nearrow (g-h) \circ \text{coker } f & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

すると射  $\phi = g-h$  と  $\phi = 0$  はともに  $\phi \circ \text{coker } f = (g-h) \circ \text{coker } f$  を満たすから、余核の普遍性から  $g-h = 0$  が従う。よって  $g = h$ .  $\square$

### PROBLEM 1.5.18

$\mathbb{k}$  線形圏  $\mathcal{C} = \text{Mod}(\mathbb{k})$  において,

$$x = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{k}, \quad x_i = \mathbb{k} \ (i \in \mathbb{N})$$

とおき, 標準直和  $(\sigma_j : \mathcal{C}(x, x_j) \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i))_{j \in \mathbb{N}}$  の普遍性

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(x, x_j) & \xrightarrow{\mathcal{C}(x, \sigma_j)} & \mathcal{C}(x, \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i) \\
 \downarrow \sigma_j & \nearrow \exists! \phi & \\
 \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) & & 
 \end{array}$$

を考える. ただし,  $j \in \mathbb{N}$  で,  $\sigma_j : x_j \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i$  は標準入射である.

このとき, 線形写像  $\phi : \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \rightarrow \mathcal{C}(x, \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$  が同型でないことを示せ.

*Proof.* 線形写像  $\phi$  は具体的に,

$$\phi \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \right) : x \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i, \quad y \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(y) \quad (f_i \in \mathcal{C}(x, x_i))$$

で与えられる.

線形写像  $\phi : \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i) \rightarrow \mathcal{C}(x, \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$  が全射でないことを示す.

恒等写像  $\text{id}_x \in \mathcal{C}(x, \prod_{i \in \mathbb{N}} x_i)$  を考え, ある線形写像  $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$  によって  $\text{id}_x = \phi(f)$  が成り立ったとする ( $f_i \in \mathcal{C}(x, x_i)$ ). このとき任意の  $y_i \in x_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) について

$$y_i = \text{id}_x(\sigma_i(y_i)) = \phi(f)(\sigma_i(y_i)) = f_i(\sigma_i(y_i))$$

となるから, 特に  $f_i \neq 0$ . これは  $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}(x, x_i)$  に矛盾する. よって  $\phi$  は全射でない.  $\square$

*Another proof.* 線形写像  $\phi$  が単射でないことを示す.

線形写像  $f_0 \in \mathcal{C}(x, x_0)$  を

$$f_0(\sigma_i(1_i)) := \begin{cases} 1_0 & (i = 1), \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N})$$

となるように定義する. ただし,  $1_i \in x_i$  は体  $x_i$  の単位元.

このとき

$$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) : \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mapsto f_0(\sigma_0(y_0)) = 0 \quad (y_i \in x_i, i \in \mathbb{N})$$

となるから、 $\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) = 0$ である。

一方定義から  $f_0 \neq 0$ 、従って  $\overline{\sigma_0}(f_0) \neq 0$ 。よって  $\phi$  は単射でない。 □

## § 1.6 多元環の準同型と線形関手

$\mathbb{k}$  を体とする。(可換環でもよい。)

### PROBLEM 1.6.4

$\mathcal{C}$  を  $\mathbb{k}$  線形局所小圏とし、 $x \in \mathcal{C}_0$  とする。このとき、**PROBLEM 1.2.5** で定義される表現関手は線形関手

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k}), \\ \mathcal{C}(-, x) : \mathcal{C}^{\text{op}} &\rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k}) \end{aligned}$$

となることを示せ。

*Proof.* 共変表現関手 :

まず  $\mathcal{C}(x, -)$  が関手  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k})$  となることを示す。

各対象  $y \in \mathcal{C}_0$  に対して、線形圏の定義より、 $\mathcal{C}(x, y)$  はベクトル空間である。また各射  $f \in \mathcal{C}(y, z)$  に対して、射の合成  $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$  が双線形であることから

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g$$

は線形写像である。よって  $\mathcal{C}(x, -)$  は関手  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{k})$  となる。

次にこれが線形関手であることを示す。

射  $f, g \in \mathcal{C}(y, z)$  とスカラー  $\lambda \in \mathbb{k}$  を任意に取る。再び射の合成  $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$  が双線形であることから、

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, f + g) : h &\mapsto (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \\ \mathcal{C}(x, \lambda f) : h &\mapsto (\lambda f) \circ h = \lambda(f \circ h) \end{aligned}$$

であり、 $\mathcal{C}(x, f + g) = \mathcal{C}(x, f) + \mathcal{C}(x, g)$  および  $\mathcal{C}(x, \lambda f) = \lambda \mathcal{C}(x, f)$  が分かる。よって  $\mathcal{C}(x, -)$  は線形関手。

反変表現関手 :

$\mathcal{C}(-, x) = \mathcal{C}^{\text{op}}(x, -)$  である。 □