圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

第 2 章 表現

§ 2.3 多元環と線形圏のより細かい対応

$\Bbbk$ を可換体（可換環でもよい）とする．また，左加群の圏を $\mathsf{Mod}(X)$，右加群の圏を $\mathsf{Mod}(X^{\mathrm{op}})$ で表し，小線形圏全体のなす線形圏を $\Bbbk$-Cat と表す．

PROBLEM 2.3.2

A を多元環，$e \in A$ を冪等元とする．このとき次を示せ．

i）$1-e \in A$ も冪等元である．
ii）e が A の中に左逆元または右逆元を持てば，$e=1$ である．
iii）部分集合 $S \subset A$ が $eS \subset S$ を満たせば，$eS = \{a \in S \mid a = ea\}$ となる．

Proof. (i) e が冪等元だから，$(1-e)^2 = 1-2e+e^2 = 1-e$ となる．
(ii) $e' \in A$ を e の左逆元とすると，$e = e(ee') = ee' = 1$．e が右逆元を持つ場合も同様に確かめられる．
(iii) $S=\emptyset$ のときは明らか．$S \neq \emptyset$ とする．$S' := \{a \in S \mid a = ea\}$ とおく．
まず S の任意の元 $a \in S$ について，$ea = (e^2)a = e(ea)$ だから，$eS \subset S'$ が分かる．
逆に，元 $a \in S$ が $a = ea$ を満たすとき，$ea \in eS$ より，$a \in eS$ となる．よって $S' \subset eS$． □

PROBLEM 2.3.5

A を多元環，$e \in A$ をその冪等元とする．右 A 加群 M について，写像 $\phi : \mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$ と $\psi : Me \to \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ を

$$\phi : f \mapsto f(e)e,$$
$$\psi : me \mapsto (x \mapsto mex)$$

によって定める．
このとき次を示せ．

i）写像 ϕ と ψ は互いに逆な線形写像である．特に，ベクトル空間としての同型

$$\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong Me$$

を得る．

ii）$M = A$ のとき，上の同型 $\mathrm{Hom}_A(eA, A) \cong Ae$ は左 A 加群としての同型となる．

iii）$M = eA$ のとき，上の同型 $\mathrm{End}_A(eA) \cong eAe$ は多元環としての同型となる．

Proof. (i) 写像 ϕ と ψ がともに線形写像であることはよい．

ψ が ϕ の左逆写像であること：

$f \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ を任意に取ると，$\psi(f(e)e)$ は写像 $x \mapsto f(e)ex$ である．特に

$$\psi(\phi(f))(ea) = f(e)e(ea) = f(e^3a) = f(ea) \quad (a \in A)$$

であるから，$\psi(\phi(f)) = f$ となる．よって $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(eA,M)}$．

ψ が ϕ の右逆写像であること：

任意の $m \in M$ に対して

$$\phi(\psi(me)) = ((me)e)e = me^3 = me$$

が成り立つから，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{Me}$．

(ii) ϕ が A 準同型であることを示せばよい．

元 $a \in A$ と $f \in \mathrm{Hom}_A(eA, A)$ を任意に取ると

$$\phi(af) = (af)(e)e = a(f(e))e = a(f(e)e) = a\phi(f)$$

だから，ϕ は A 準同型である．

(iii) ϕ が多元環準同型であることを示せばよい．

元 $f, g \in \mathrm{End}_A(eA)$ を任意に取ると，

$$\phi(fg) = (fg)(e)e = f(e)g(e)e = f(e)eg(e)e = \phi(f)\phi(g)$$

だから，ϕ は多元環準同型である． □

Problem 2.3.9

圏 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ を，有限対象の小線形圏からなる $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}$ の部分圏であって，射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ の対象関数 $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}'_0$ が単射であるようなものとする．

また，圏 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ を

- 対象：$(\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0 = \{(A, E) \mid A$ は多元環，$E \subset A$ は A の直交冪等元の完全系$\}$，
- 射：$\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}((A, E), (A', E')) = \{f : A \to A' \mid f$ は積を保つ線形写像で $f(E) \subset E'\}$，
- 射の合成：通常の写像の合成，
- 恒等射：$\mathrm{id}_{(A,E)} = \mathrm{id}_A$

で定義する．

このとき，以下で定義される函手 $\mathsf{Cat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ と $\mathsf{Mat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ が互いに擬逆

であり，特に圏同値 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \simeq \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ が成り立つことを示せ．
函手 $\mathsf{Cat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ を

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の対象 $(A, E) \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0$ に対して圏 $\mathcal{C}_{A,E} = \mathsf{Cat}(A, E) \in \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ は
  - 対象：$(\mathcal{C}_{A,E})_0 \coloneqq E$,
  - 射：$\mathcal{C}_{A,E}(x, y) \coloneqq yAx$,
  - 射の合成：多元環 A における積,
  - 恒等射：$\mathsf{id}_x \coloneqq x \cdot 1 \cdot x = x$,
- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の射 $f : (A, E) \to (A', E')$ に対して函手 $F_f = \mathsf{Cat}(f) : \mathcal{C}_{A,E} \to \mathcal{C}_{A',E'}$ は
  - 対象：$x \mapsto f(x)$,
  - 射：$a \in A$ のとき $yax \mapsto f(yax) = f(y)f(a)f(x)$

で定義し，函手 $\mathsf{Mat} : \Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}} \to \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ を

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の対象 $\mathcal{C} \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対して $\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の対象 $(A_{\mathcal{C}}, E_{\mathcal{C}}) = \mathsf{Mat}(\mathcal{C}) \in \Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ は

$$A_{\mathcal{C}} \coloneqq \coprod_{x,y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(x, y), \quad E_{\mathcal{C}} \coloneqq \left\{ e_x \coloneqq \left(\mathsf{id}_x \, \delta_{(y,z),(x,x)} \right)_{y,z \in \mathcal{C}_0} \;\middle|\; x \in \mathcal{C}_0 \right\},$$

- $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して多元環準同型 $f_F : A_{\mathcal{C}} \to A_{\mathcal{C}'}$ は

$$f_F \left((a_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0} \right) \coloneqq \left(F(a_{y,x}) \right)_{y,x \in \mathcal{C}_0} \quad (a_{y,x} \in \mathcal{C}(x, y), x, y \in \mathcal{C}_0)$$

で定義する[*1]．ただし線形圏 $\mathcal{C} \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対し，$A_{\mathcal{C}} = \coprod_{x,y \in \mathcal{C}_0} \mathcal{C}(x, y)$ は $\Bbbk$ 加群としての外部直和であり，積を

$$(a_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0} \cdot (b_{y,x})_{y,x \in \mathcal{C}_0} \coloneqq \left(\sum_{z \in \mathcal{C}_0} a_{y,z} \circ b_{z,x} \right)_{y,x \in \mathcal{C}_0} \qquad (a_{y,x}, b_{y,x} \in \mathcal{C}(x, y), x, y \in \mathcal{C}_0)$$

と定める．単位元は $\sum_{x \in \mathcal{C}_0} \mathsf{id}_x$ である．

Proof. Mat が Cat の左擬逆であること：
各 $(A, E) \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0$ に対し

$$A = \bigoplus_{x,y \in E} yAx$$

が成り立つことに注意する．実際，相異なる $(y, x) \neq (y', x') \in E \times E$ に対して元 $yax = y'a'x' \in yAx \cap y'Ax'$ を任意に取ると，$x \neq x'$ ならば $yax = (yax)x = (y'a'x)'x = 0$ となり，$y \neq y'$ ならば $yax = y(yax) = y(y'a'x') = 0$

[*1] $(F(a_{y,x}))_{y,x \in \mathcal{C}_0}$ は，$x' = F(x)$ かつ $y' = F(y)$ のとき $b_{y',x'} = F(a_{y,x})$ で，それ以外のとき $b_{y',x'} = 0$ であるような元 $(b_{y',x'})_{y',x' \in \mathcal{C}'_0}$ を意味する．

となるから，いずれの場合でも $yAx \cap y'Ax' = 0$ が分かる．また，任意の元 $a \in A$ は

$$a = \left(\sum_{y\in E} y\right) a \left(\sum_{x\in E} x\right) = \sum_{x,y\in E} yax$$

と書けるから，$A = \sum_{x,y\in E} yAx$ となる．以上より $A = \bigoplus_{x,y\in E} yAx$.

そこで多元環準同型 $\alpha_{A,E} : A \to A_{\mathcal{C}_{A,E}}$ を内部直和と外部直和の間の自然な同型

$$A = \bigoplus_{x,y\in E} yAx \to \coprod_{x,y\in E} yAx$$

とすれば，準同型の族 $\alpha = (\alpha_{A,E})_{(A,E)\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}})_0}$ は自然同型 $\alpha : \mathsf{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}} \to \mathsf{Mat} \circ \mathsf{Cat}$ を定める．

ただし，$\Bbbk\text{-}\mathsf{Alg}_{\mathsf{coi}}$ の射 $f : (A,E) \to (A',E')$ と元 $a \in A$ に対して等式 $(y'f(a)x')_{y',x'\in E'} = (f(y)f(a)f(x))_{y,x\in E}$ が成り立つことは，内部直和 $A' = \bigoplus_{x',y'\in E'} y'A'x'$ における等式

$$\left(\sum_{y'\in E'} y'\right) f(a) \left(\sum_{x'\in E'} x'\right) = f(a) = \left(\sum_{y\in E} f(y)\right) f(a) \left(\sum_{x\in E} f(x)\right)$$

から従う．

$$\begin{tikzcd}
(A,E) \arrow[r, "\alpha_{A,E}"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(A,E)) = \left(A_{\mathcal{C}_{A,E}}, E_{\mathcal{C}_{A,E}}\right) \arrow[d, "\mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(f))"] \\
(A',E') \arrow[r, "\alpha_{A',E'}"'] & \mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(A',E')) = \left(A_{\mathcal{C}_{A',E'}}, E_{\mathcal{C}_{A',E'}}\right)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, mapsto, "\alpha_{A,E}"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & & (yax)_{y,x\in E} \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Mat}(\mathsf{Cat}(f))"] \\
f(a) \arrow[r, mapsto, "\alpha_{A',E'}"'] & (y'f(a)x')_{y',x'\in E'} \arrow[r, equal] & (f(y)f(a)f(x))_{y,x\in E}
\end{tikzcd}$$

Mat が Cat の右擬逆であること：

各 $\mathcal{C} \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ に対して函手 $\beta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}$ を

- 対象：$x \mapsto e_x$,
- 射：$f : x \to y$ のとき $f \mapsto e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0} e_x$

で定義する．これらはそれぞれ全単射

$$\mathcal{C}_0 \to \left(\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}\right)_0, \quad \mathcal{C}_1 \to \left(\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}\right)_1$$

となっているから，問 1.4.5 より函手 $\beta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}}$ は同型.

残りは，函手の族 $\beta = (\beta_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}\in(\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0}$ が自然変換 $\beta : \mathsf{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}} \to \mathsf{Cat} \circ \mathsf{Mat}$ となることを示せばよい．

圏 $\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}}$ の対象 $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in (\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathsf{f}})_0$ と射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を任意に取る．

対象 $x \in \mathcal{C}$ については

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))(e_x) = f_F(e_x) &= f_F\left((\mathsf{id}_x \delta_{(y,z),(x,x)})_{y,z\in\mathcal{C}_0}\right) \\
&= \left(F(\mathsf{id}_x \delta_{(y,z),(x,x)})\right)_{y,z\in\mathcal{C}_0} \\
&= e_{F(x)}
\end{aligned}$$

であるから，$(\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\circ\beta_{\mathcal{C}})_0=(\beta_{\mathcal{C}'}\circ F)_0$．

圏 $\mathcal{C}$ の射 $f:x\to y$ については

$$\begin{aligned}\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\left(e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_x\right)&=f_F(e_y)f_F\left((f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}\right)f_F(e_x)\\&=e_{F(y)}(F(f\delta_{(z,w),(y,x)}))_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_{F(x)}\\&=e_{F(y)}(F(f)\delta_{(z',w'),(F(y),F(x))})_{z',w'\in\mathcal{C}'_0}e_{F(x)}\end{aligned}$$

であるから，$(\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))\circ\beta_{\mathcal{C}})_1=(\beta_{\mathcal{C}'}\circ F)_1$．

以上より，$\beta:\mathrm{id}_{\Bbbk\text{-}\mathsf{Cat}_{\mathrm{f}}}\to\mathsf{Cat}\circ\mathsf{Mat}$ は自然変換である．よって β は自然同型となる．

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(\mathcal{C}))=\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}},E_{\mathcal{C}}} \arrow[d, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & \mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(\mathcal{C}'))=\mathcal{C}_{A_{\mathcal{C}'},E_{\mathcal{C}'}}\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}x \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "F"'] & e_x \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\ F(x) \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & e_{F(x)}\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}f \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}}"] \arrow[dd, "F"'] & e_y(f\delta_{(z,w),(y,x)})_{z,w\in\mathcal{C}_0}e_x \arrow[d, mapsto, "\mathsf{Cat}(\mathsf{Mat}(F))"] \\ & f_F(e_y)\left(F(f\delta_{(z,w),(y,x)})\right)_{z,w\in\mathcal{C}_0}f_F(e_x) \arrow[d, equal] \\ F(f) \arrow[r, mapsto, "\beta_{\mathcal{C}'}"'] & e_{F(y)}\left(F(f)\delta_{(z',w'),(F(y),F(x))}\right)_{z',w'\in\mathcal{C}'_0}e_{F(x)}\end{tikzcd}$$

□

PROBLEM 2.3.15

有限次元（長さ有限）多元環 $A\neq 0$ は直交原始冪等元の完全系を持つことを示せ．また $E\subset A$ を直交原始冪等元の完全系とすると，右 A 加群として $A=\bigoplus_{e\in E}eA$ となることも示せ．

Proof. 有限個の直既約部分右 A 加群 $P_1,\dots,P_n\subset A$ が存在して $A=P_1\oplus\cdots\oplus P_n$ とできる．このことを A の次元 $\dim A$ についての帰納法で証明する．

まず $\dim A=1$ のときは明らか．次元が $\dim A$ より小さい任意の多元環について，主張が成り立ったとする．

A 自身が直既約右 A 加群のときはよい．そうでないならば，ある部分右 A 加群 $0\neq I,J\subset A$ が存在して $A=I\oplus J$ と書ける．このとき $\dim I,\dim J<\dim A$ だから，帰納法の仮定により，ある有限個の直既約部分加群 $P'_1,\dots,P'_\ell\subset I$ と $P''_1,\dots,P''_m\subset J$ が存在して

$$I=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_\ell,\quad J=P''_1\oplus\cdots\oplus P''_m$$

とできる．

このとき $P'_1,\dots,P'_\ell,P''_1,\dots,P''_m\subset A$ はすべて A の直既約部分右 A 加群であって，

$$A=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_\ell\oplus P''_1\oplus\cdots\oplus P''_m$$

という直和分解を得る．

この直和分解 $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ から，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して元 $e_i \in P_i$ が存在して，$1 = e_1 + \cdots + e_n$ とできる．$E \coloneqq \{e_1, \ldots, e_n\}$ が A の直交原始冪等元の完全系であることを示す．

各 $1 \leqslant i \leqslant n$ について，等式 $1 = e_1 + \cdots + e_n$ の両辺に右から e_i を掛けて

$$e_i = e_1 e_i + \cdots + e_n e_i$$

となる．この左辺は $e_i \in P_i$ であり，右辺の各項は $e_j e_i \in P_j$ だから，

$$e_j e_i = \begin{cases} e_i & (j = i), \\ 0 & (j \neq i), \end{cases}$$

すなわち E は直交冪等元の完全系である．

また $1 = e_1 + \cdots + e_n$ より $A \subset e_1 A + \cdots + e_n A$ が分かる．一方各 $1 \leqslant i \leqslant n$ について $e_i A \subset P_i$ だから，$e_1 A + \cdots + e_n A \subset P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$．よって $e_i A = P_i$ となる．

各 $e_i A = P_i$ は直既約であるから，補題 2.3.3 より e_i は原始的である． □

Problem 2.3.21

$A \neq 0$ を多元環とする．次が同値であることを示せ．

i）A は局所的である．

ii）任意の $a \in A$ に対して，a または $1 - a$ が単元である．

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii)

ある元 $a \in A$ に対して a と $1 - a$ がともに非単元であるとすると，A は局所的だから $1 = a + (1 - a)$ もまた非単元となり矛盾する．よって a と $1 - a$ の少なくとも一方は単元である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

非単元 $a, b \in A$ の和 $c \coloneqq a + b \in A$ が単元であるとする．このとき $a' \coloneqq c^{-1} a$，$b' \coloneqq c^{-1} b$ とおくと，$1 = a' + b'$ が成り立つ．よって a' と b' のいずれかは単元である．

a' が単元であれば，$a = ca'$ は逆元 $a'^{-1} c^{-1}$ を持つ．これは a が非単元であることに矛盾する．同様に b' が単元ならば b が単元となり矛盾する．従って c は非単元である． □

Problem 2.3.23

A を多元環とし，$M \in (\mathsf{Mod}(A^{\mathsf{op}}))_0$ とする．このとき次を示せ．

i）$M = M_1 \oplus M_2$ なる部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ が存在するとき，各 $i = 1, 2$ について A 自己準同型 $e_i \in \mathsf{End}_A(M)$ を合成 $e_i : M \twoheadrightarrow M_i \hookrightarrow M$ によって定める．ただし $M \twoheadrightarrow M_i$ は標準射影である．このとき各 e_i は $\mathsf{End}_A(M)$ の冪等元であって，$\mathsf{id}_M = e_1 + e_2$ を満たす．

ii）$e \in \mathsf{End}_A(M)$ が冪等元ならば，右 A 加群として

$$M = \mathsf{Im}\, e \oplus \mathsf{Im}(\mathsf{id}_M - e)$$

となる．

iii）次は同値である：

a) M は直既約である；

b) $\mathrm{End}_A(M)$ の冪等元は 0 と id_M のみである．

Proof. (i) 任意の元 $m \in M$ に対して，$m = m_1 + m_2$ なる元 $m_1 \in M_1$ と $m_2 \in M_2$ が存在する．このとき

$$e_1(m) = m_1, \quad e_1^2(m) = e_1(m_1) = m_1$$

より，e_1 は冪等元である．同様に e_2 も冪等元である．また $e_1(m)+e_2(m) = m_1 + m_2 = m$ だから $\mathrm{id}_M = e_1 + e_2$ も確かめられる．

(ii) まず任意の元 $m \in M$ に対して $m = e(m) + (\mathrm{id}_M - e)(m)$ であるから，$M = \mathrm{Im}\, e + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e)$ となる．

次に $x \in \mathrm{Im}\, e \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e)$ とすると，ある $m, m' \in M$ が存在して，$x = e(m)$ かつ $x = (\mathrm{id}_M - e)(m)$ が成り立つ．このとき

$$x = e(m) = e^2(m) = e(x) = e(m - e(m)) = e(m) - e^2(m) = 0.$$

よって $\mathrm{Im}\, e \cap \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e) = 0$ となる．

以上より $M = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e)$.

(iii) (a) $\Longrightarrow$ (b)

冪等元 $0, \mathrm{id}_M \neq e \in \mathrm{End}_A(M)$ が存在すれば，(ii) より $M = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e)$ かつ $\mathrm{Im}\, e, \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M - e) \neq 0$ が成り立つ．よって M は直既約でない．

(b) $\Longrightarrow$ (a)

M が直既約でないとすると，部分加群 $0 \neq M_1, M_2 \subset M$ が存在して $M = M_1 \oplus M_2$ とできる．このとき (i) より，0 とも id_M とも異なる冪等元 $e_1, e_2 \in \mathrm{End}_A(M)$ の存在が分かる．

□

PROBLEM 2.3.24

A を多元環とし，M を有限次元（長さ有限）右 A 加群とする．このとき次を示せ．

i）$f \in \mathrm{End}_A(M)$ ならば，ある $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ によって $M = \mathrm{Ker}\, f^n \oplus \mathrm{Im}\, f^n$ となる．

ii）M が直既約ならば，任意の $f \in \mathrm{End}_A(M)$ は同型または冪零である．

iii）M が直既約ならば，$\mathrm{End}_A(M)$ は局所多元環である．

Proof. (i) M の部分加群の昇鎖列

$$\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \cdots$$

と降鎖列

$$\mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \cdots$$

を考える．M が有限次元だから，ある $\ell, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ によって $\operatorname{Ker} f^{\ell} = \operatorname{Ker} f^{\ell+1}$ と $\operatorname{Im} f^{m} = \operatorname{Im} f^{m+1}$ とできる．このとき，任意の $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ について $\operatorname{Ker} f^{\ell} = \operatorname{Ker} f^{\ell+i}$，$\operatorname{Im} f^{m} = \operatorname{Im} f^{m+i}$ となる．

$n := \max\{\ell, m\}$ とおく．$M = \operatorname{Ker} f^{n} \oplus \operatorname{Im} f^{n}$ となっていることを示す．

まず $m \in \operatorname{Ker} f^{n} \cap \operatorname{Im} f^{n}$ を任意に取ると，$m \in \operatorname{Im} f^{n}$ より，ある元 $m' \in M$ が存在して $m = f^{n}(m')$ となる．一方 $m \in \operatorname{Ker} f^{n}$ より，$f^{2n}(m') = f^{n}(m) = 0$，すなわち $m' \in \operatorname{Ker} f^{2n}$ となる．今，$\operatorname{Ker} f^{n} = \operatorname{Ker} f^{2n}$ だから，$m = f^{n}(m') = 0$．よって $\operatorname{Ker} f^{n} \cap \operatorname{Im} f^{n} = 0$ が分かる．

次に $M = \operatorname{Ker} f^{n} + \operatorname{Im} f^{n}$ を示す．$m \in M$ を任意に取ると，$f^{n}(m) \in \operatorname{Im} f^{n} = \operatorname{Im} f^{2n}$ だから $f^{n}(m) = f^{2n}(m')$ なる元 $m' \in M$ が存在する．

このとき $f^{n}(m - f^{n}(m')) = 0$ より，$m - f^{n}(m') \in \operatorname{Ker} f^{n}$ である．よって $m \in \operatorname{Ker} f^{n} + f^{n}(m') \subset \operatorname{Ker} f^{n} + \operatorname{Im} f^{n}$ となり，$M = \operatorname{Ker} f^{n} + \operatorname{Im} f^{n}$ を証明できた．

(ii) 任意の元 $f \in \operatorname{End}_{A}(M)$ を取る．(i) よりある $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ が存在して直和分解 $M = \operatorname{Ker} f^{n} \oplus \operatorname{Im} f^{n}$ を得るが，M が直既約だから $\operatorname{Ker} f^{n} = 0$ または $\operatorname{Im} f^{n} = 0$．

$\operatorname{Im} f^{n} = 0$ は f が冪零であることに他ならない．

$\operatorname{Ker} f^{n} = 0$ とすると，$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^{n} = 0$ より，f は単射となる．一方このとき，$\operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^{n} = M$ より，f は全射となる．よって f は同型．

(iii) **Problem 2.3.21** より，任意の $f \in \operatorname{End}_{A}(M)$ に対して f または $\mathrm{id}_{M} - f$ が単元であることを示せばよい．

(ii) より，f は同型または冪零である．

f が同型ならば $\operatorname{End}_{A}(M)$ の単元である．

f が冪零ならばある $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ によって $f^{n} = 0$ となる．このとき $g := 1 + f + \cdots + f^{n-1} \in \operatorname{End}_{A}(M)$ が $\mathrm{id}_{M} - f$ の逆元となる．実際

$$(\mathrm{id}_{M} - f)g = g(\mathrm{id}_{M} - f) = \mathrm{id}_{M} - f^{n} = \mathrm{id}_{M}.$$

□