圏と表現論 演習問題

@naughiez

Contents

第 1 章 圏

§ 1.1 モノイドと圏

PROBLEM 1.1.2

$(G, \mu, 1)$ がモノイドならば $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1)$ もモノイドとなることを示せ．ただし，

$$\mu^{\mathrm{op}}(x, y) := \mu(y, x) \quad (x, y \in G).$$

Proof. 結合律の公理は各 $x, y, z \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{op}}(\mu^{\mathrm{op}}(x, y), z) &= \mu^{\mathrm{op}}(\mu(y, x), z) \\ &= \mu(z, \mu(y, x)) \\ &= \mu(\mu(z, y), x) \\ &= \mu^{\mathrm{op}}(x, \mu^{\mathrm{op}}(y, z))\end{aligned}$$

と確認できる．単位元は明らか． □

PROBLEM 1.1.5

$(G, \mu, 1, \iota)$ が群ならば $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1, \iota)$ も群となることを示せ．

Proof. **PROBLEM 1.1.2** より $(G, \mu^{\mathrm{op}}, 1)$ はモノイドである．ι がこの反転モノイド G^{op} の逆元を与えることを言えばよく，それは任意の $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{op}}(x, \iota(x)) &= \mu(\iota(x), x) = 1, \\ \mu^{\mathrm{op}}(\iota(x), x) &= \mu(x, \iota(x)) = 1\end{aligned}$$

となることから分かる． □

Problem 1.1.11

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, \mathrm{id})$ が圏ならば $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathrm{cod}, \mathrm{dom}, \circ^{\mathrm{op}}, \mathrm{id})$ も圏となることを示せ．ただし，圏 $\mathcal{C}$ 内で合成可能な射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$f \circ^{\mathrm{op}} g := g \circ f.$$

Proof. 結合律：圏 $\mathcal{C}$ の射

$$w \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{h} z$$

に対して

$$\begin{aligned}(f \circ^{\mathrm{op}} g) \circ^{\mathrm{op}} h &= h \circ (g \circ f) \\ &= (h \circ g) \circ f \\ &= f \circ^{\mathrm{op}} (g \circ^{\mathrm{op}} h).\end{aligned}$$

単位律：圏 $\mathcal{C}$ の射 $f \in \mathcal{C}(x, y)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_x \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ \mathrm{id}_x = f, \\ f \circ^{\mathrm{op}} \mathrm{id}_y = \mathrm{id}_y \circ f = f.\end{aligned}$$

□

Problem 1.1.24

小集合の圏 Set において，集合の直積が積で非交和が余積となることを示せ．

Proof. I を小集合，$(X_i)_{i \in I}$ を小集合の族とする．

直積が積：

$X := \prod_{i \in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : X \to X_i$ を標準射影とする．

小集合 Y と写像の族 $(\rho_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，写像 $f : Y \to X$ が

$$f(y) := (\rho_i(y))_{i \in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある写像 $g : Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より，$g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(y) = f(y)$ が言える．よって $g = f$.

非交和が余積：

$X := \coprod_{i \in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : X_i \to X$ を標準入射とする．

小集合 Y と写像の族 $(\tau_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ が与えられたとき，写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x) := \tau_i(x) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある写像 $g : X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より，任意の $x \in X$ に対して $g(x) = f(x)$ となる．よって $g = f$. □

§ 1.2 モノイド準同型と函手

PROBLEM 1.2.5

$\mathcal{C}$ を局所小圏とし，$x \in \mathcal{C}_0$ とする．このとき次を示せ．

i）函手 $\mathcal{C}(x, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ が

- 対象：$y \mapsto \mathcal{C}(x, y)$,
- 射：$f \mapsto \mathcal{C}(x, f)$，ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g,$$

によって定義できる．

ii）函手 $\mathcal{C}(-, x) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ が

- 対象：$y \mapsto \mathcal{C}(y, x)$,
- 射：$f \mapsto \mathcal{C}(f, x)$，ただし射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して

$$\mathcal{C}(f, x) : \mathcal{C}(z, x) \to \mathcal{C}(y, x), \quad g \mapsto g \circ f,$$

によって定義できる．

iii）函手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ に対して，函手 $F^{\mathrm{op}}:\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ が

- 対象：$y\mapsto F(y)$,
- 射：$f\mapsto F(f)$

によって定義できる．

Proof. (i) $\mathcal{C}(x,-):\mathcal{C}\to\mathsf{Set}$ がクイバー射で各対象 $y\in\mathcal{C}_0$ に対して $\mathcal{C}(x,\mathrm{id}_y)=\mathrm{id}_{\mathcal{C}(x,y)}$ であることは明らか．

圏 $\mathcal{C}$ の射

$$y\xrightarrow{f}z\xrightarrow{g}w$$

を考える．射 $\mathcal{C}(x,g\circ f):\mathcal{C}(x,y)\to\mathcal{C}(x,w)$ は $h\mapsto(g\circ f)\circ h$ で与えられる．

他方の射 $\mathcal{C}(x,g)\circ\mathcal{C}(x,f):\mathcal{C}(x,y)\to\mathcal{C}(x,w)$ は $h\mapsto f\circ h\mapsto g\circ(f\circ h)$ で与えられる．

圏 $\mathcal{C}$ における結合律 $(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)$ より，この二つの射は一致する：

$$\mathcal{C}(x,g\circ f)=\mathcal{C}(x,g)\circ\mathcal{C}(x,f).$$

以上より，クイバー射 $\mathcal{C}(x,-)$ は函手となる．

(ii) $\mathcal{C}(-,x)=\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x,-)$ である．

(iii) 射 $f\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(y,z)$ に対して $F^{\mathrm{op}}(f)\in\mathcal{D}^{\mathrm{op}}(F^{\mathrm{op}}(y),F^{\mathrm{op}}(z))$ となることはすぐに分かる．また，圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の各対象 $y\in\mathcal{C}_0^{\mathrm{op}}$ について $F^{\mathrm{op}}(\mathrm{id}_y)=\mathrm{id}_{F^{\mathrm{op}}(y)}$ も明らか．結合律は，

$$\begin{aligned}F^{\mathrm{op}}(g\circ^{\mathrm{op}}f)&=F(g\circ^{\mathrm{op}}f)\\&=F(f\circ g)\\&=F(f)\circ F(g)\\&=F^{\mathrm{op}}(g)\circ^{\mathrm{op}}F^{\mathrm{op}}(f)\end{aligned}$$

と確かめられる． □

§ 1.3 自然変換

PROBLEM 1.3.3

$\mathcal{C}$ を局所小圏とし，$f:x\to y$ を圏 $\mathcal{C}$ の射とする．このとき次を示せ．

i）射の族

$$\mathcal{C}(f,-):=(\mathcal{C}(f,z):\mathcal{C}(y,z)\to\mathcal{C}(x,z))_{z\in\mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(f,-):\mathcal{C}(y,-)\to\mathcal{C}(x,-)$ を定める．ただし，$\mathcal{C}(x,-)$ や $\mathcal{C}(y,-)$ は **PROBLEM 1.2.5** (i) の共変表現函手である．

ii）射の族

$$\mathcal{C}(-,f) \coloneqq (\mathcal{C}(z,f) : \mathcal{C}(z,x) \to \mathcal{C}(z,y))_{z\in\mathcal{C}_0}$$

は自然変換 $\mathcal{C}(-,f) : \mathcal{C}(-,x) \to \mathcal{C}(-,y)$ を定める．ただし，$\mathcal{C}(-,x)$ や $\mathcal{C}(-,y)$ は **Problem 1.2.5** (ii) の反変表現函手である．

Proof. (i) 圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $g : z \to w$ を取る．このとき図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(y,z) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,z)"] \arrow[d, "\mathcal{C}(y,g)"'] & \mathcal{C}(x,z) \arrow[d, "\mathcal{C}(x,g)"] \\
\mathcal{C}(y,w) \arrow[r, "\mathcal{C}(f,w)"'] & \mathcal{C}(x,w)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．

任意の射 $h \in \mathcal{C}(y,z)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[rr, mapsto, "\mathcal{C}(f,z)"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(y,g)"'] & & h \circ f \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(x,g)"] \\
g \circ h \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}(f,w)"'] & (g \circ h) \circ f \arrow[r, no head] & g \circ (h \circ f)
\end{tikzcd}$$

となるから，$\mathcal{C}(f,-) : \mathcal{C}(y,-) \to \mathcal{C}(x,-)$ は自然変換である．

(ii) $\mathcal{C}(-,f) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(f,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x,-) \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(y,-)$ である． □

Problem 1.3.4

$\mathcal{C}$ を圏，I を集合とし $(x_i)_{i\in I}$ を圏 $\mathcal{C}$ の対象の族とする．このとき次の自然同型が得られることを示せ：

$$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I} \coloneqq ((\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(-,\prod_{i\in I} x_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I}\mathcal{C}(-,x_i),$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i,-))_{i\in I} \coloneqq ((\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I})_{z\in\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I} x_i,-\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,-).$$

ただし，各 $\pi_j : \prod_{i\in I} x_i \to x_j$ と $\sigma_j : x_j \to \coprod_{i\in I}$ はそれぞれ積の射影族と余積の入射族であり，また各対象 $z \in \mathcal{C}_0$ に対して

$$(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I} : \mathcal{C}\left(z,\prod_{i\in I} x_i\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(z,x_i), \qquad f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I},$$

$$(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I} : \mathcal{C}\left(\coprod_{i\in I} x_i, z\right) \to \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,z), \qquad f \mapsto (f \circ \sigma_i)_{i\in I}$$

と定義する．

Proof. 積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって，$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\in\mathcal{C}(y,z)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(z,\prod_{i\in I}x_i) \arrow[r, "(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,\prod_{i\in I}x_i)"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(z,x_i) \arrow[d, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(f,x_i)"] \\
\mathcal{C}(y,\prod_{i\in I}x_i) \arrow[r, "(\mathcal{C}(y,\pi_i))_{i\in I}"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(y,x_i)
\end{tikzcd}$$

を考えると，各射 $g\in\mathcal{C}(z,\prod_{i\in I}x_i)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(f,\prod_{i\in I}x_i)"'] & & (\pi_i\circ g)_{i\in I} \arrow[d, mapsto, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(f,x_i)"] \\
g\circ f \arrow[r, mapsto, "(\mathcal{C}(y,\pi_i))_{i\in I}"'] & (\pi_i\circ(g\circ f))_{i\in I} \arrow[r, no head] & ((\pi_i\circ g)\circ f)_{i\in I}
\end{tikzcd}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型．

余積が直積に写ること：

各 $(\mathcal{C}(z,\pi_i))_{i\in I}$ が同型射であることはすでに示されている（注意 1.1.26）．よって，$(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ が自然変換となることを示せばよい．

圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f\in\mathcal{C}(y,z)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,y) \arrow[r, "(\mathcal{C}(\sigma_i,y))_{i\in I}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,f)"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,y) \arrow[d, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,f)"] \\
\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,z) \arrow[r, "(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I}"'] & \prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,z)
\end{tikzcd}$$

を考えると，各射 $g\in\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,y)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[rr, mapsto, "(\mathcal{C}(\sigma_i,y))_{i\in I}"] \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(\coprod_{i\in I}x_i,f)"'] & & (g\circ\sigma_i)_{i\in I} \arrow[d, mapsto, "\prod_{i\in I}\mathcal{C}(x_i,f)"] \\
f\circ g \arrow[r, mapsto, "(\mathcal{C}(\sigma_i,z))_{i\in I}"'] & ((f\circ g)\circ\sigma_i)_{i\in I} \arrow[r, no head] & (f\circ(g\circ\sigma_i))_{i\in I}
\end{tikzcd}$$

となるから，上の図式は可換である．従って $(\mathcal{C}(-,\pi_i))_{i\in I}$ は自然同型． □

§ 1.4 圏の同型と同値

Problem 1.4.5

$F = (F_0, F_1) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を圏の間の函手とするとき，次は同値であることを示せ：

i）函手 F は同型；
ii）写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ はともに全単射.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 函手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が同型だから，函手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在して $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ および $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= (G \circ F)_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= (F \circ G)_0 = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= (G \circ F)_1 = (\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= (F \circ G)_1 = (\mathrm{id}_{\mathcal{D}})_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

であるから，写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ はともに全単射.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 写像 $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ と $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ がともに全単射ならば，写像 $G_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}_0$ と $G_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}_1$ が存在して

$$\begin{aligned} G_0 \circ F_0 &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}, & F_0 \circ G_0 &= \mathrm{id}_{\mathcal{D}_0}, \\ G_1 \circ F_1 &= \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}, & F_1 \circ G_1 &= \mathrm{id}_{\mathcal{D}_1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

このとき $G = (G_0, G_1) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ は函手である．実際，各恒等射 $\mathrm{id}_x \in \mathcal{D}(x, x)$ に対して

$$\mathrm{id}_{G_0(x)} = (G_1 \circ F_1)\left(\mathrm{id}_{G_0(x)}\right) = G_1\left(\mathrm{id}_{F_0(G_0(x))}\right) = G_1(\mathrm{id}_x)$$

となり，また圏 $\mathcal{D}$ の射

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

に対して

$$\begin{aligned} F_1 \circ G_1(g \circ f) = g \circ f &= (F_1 \circ G_1(g)) \circ (F_1 \circ G_1(f)) \\ &= F_1(G_1(g) \circ G_1(f)) \end{aligned}$$

より

$$G_1(g \circ f) = G_1(g) \circ G_1(f)$$

を得る.

この函手 G が F の逆となっていることは，写像 G_0 と G_1 の定義から分かる. $\square$

§ 1.5 多元環と線型圏

$\Bbbk$ を体とする．（可換環でもよい．）

PROBLEM 1.5.8

$\Bbbk$ 上ベクトル空間の圏 $\mathrm{Mod}(\Bbbk)$ において，ベクトル空間の直積が積で直和が余積となることを示せ．

Proof. I を小集合，$(X_i)_{i\in I}$ をベクトル空間の族とする．

直積が積：

$X \coloneqq \prod_{i\in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : X \to X_i$ を標準射影とする．

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\rho_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ が与えられたとき，線形写像 $f : Y \to X$ が

$$f(y) \coloneqq (\rho_i(y))_{i\in I} \quad (y \in Y)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある線形写像 $g : Y \to X$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(y)) = \rho_i(y) = \pi_i(f(y)) \quad (y \in Y, i \in I)$$

より，$g(y)$ の第 i 成分と $f(y)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(y) = f(y)$ が言える．よって $g = f$．

直和が余積：

$X \coloneqq \coprod_{i\in I} X_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : X_i \to X$ を標準入射とする．

ベクトル空間 Y と線形写像の族 $(\tau_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ が与えられたとき，線形写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x) \coloneqq \sum_{i\in I} \tau_i(x_i) \quad (x \in X_i)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある線形写像 $g : X \to Y$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(x)) = \tau_i(x) = f(\sigma_i(x)) \quad (x \in X_i, i \in I)$$

より，任意の $x \in X$ に対して $g(x) = \sum_{i\in I} g(\sigma_i(x_i)) = \sum_{i\in I} f(\sigma_i(x_i)) = f(x)$ となる．よって $g = f$． □

PROBLEM 1.5.12

$\mathcal{C}$ を $\Bbbk$ 線形圏，$f : x \to y$ をその射とする．このとき次を示せ．

i) $a : u \to x$ と $b : v \to x$ がともに射 f の核ならば，$b = a \circ c$ なる射 $c : v \to u$ がただ一つ存在する．そこで f の核を $\ker f : \operatorname{Ker} f \to x$ と書くとき，$\ker f$ はモノ射である．

ii) $a : y \to u$ と $b : y \to v$ がともに射 f の余核ならば，$b = c \circ a$ なる射 $c : u \to v$ がただ一つ存在する．そこで f の余核を $\operatorname{coker} f : \operatorname{Coker} f \to x$ と書くとき，$\operatorname{coker} f$ はエピ射である．

Proof. (i)

核の一意性：

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "a"] & x \arrow[r, "f"] & y \\ v \arrow[u, dashed, "\exists! c"] \arrow[ur, "b"'] & & \end{tikzcd}$$

核 b の定義から $f \circ b = 0$ となる．よって核 a の普遍性より，ただ一つの射 $c : v \to u$ が存在して $b = a \circ c$ とできる．

核がモノ射であること：

圏 $\mathcal{C}$ の射 $g, h : z \to \operatorname{Ker} f$ が $\ker f \circ g = \ker f \circ h$ を満たすとする．このとき射の合成 $\circ : \mathcal{C}(\operatorname{Ker} f, x) \times \mathcal{C}(z, \operatorname{Ker} f) \to \mathcal{C}(z, x)$ の双線形性より，$\ker f \circ (g - h) = 0$ となる．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & x \arrow[r, "f"] & y \\ z \arrow[u, dashed, "\exists! \phi"] \arrow[ur, "\ker f \circ (g-h)"'] & & \end{tikzcd}$$

すると射 $\phi = g - h$ と $\phi = 0$ はともに $\ker f \circ \phi = \ker f \circ (g - h)$ を満たすから，核の普遍性から $g - h = 0$ が従う．よって $g = h$.

(ii)

余核の一意性：

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & u \arrow[d, dashed, "\exists! c"] \\ & & v \end{tikzcd}$$

余核 b の定義から $b \circ f = 0$ となる．よって余核 a の普遍性より，ただ一つの射 $c : u \to v$ が存在して $b = c \circ a$ とできる．

余核がエピ射であること：

圏 $\mathcal{C}$ の射 $g, h : \operatorname{Coker} f \to z$ が $g \circ \operatorname{coker} f = h \circ \operatorname{coker} f$ を満たすとする．このとき射の合成 $\circ : \mathcal{C}(\operatorname{Coker} f, z) \times \mathcal{C}(y, \operatorname{Coker} f) \to \mathcal{C}(y, z)$ の双線形性より，$(g - h) \circ \operatorname{coker} f = 0$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] & y \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] \arrow[dr, "(g-h)\circ\operatorname{coker} f"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!\phi"] \\
 & & z
\end{tikzcd}
$$

すると射 $\phi = g-h$ と $\phi = 0$ はともに $\phi\circ\operatorname{coker} f = (g-h)\circ\operatorname{coker} f$ を満たすから，余核の普遍性から $g-h=0$ が従う．よって $g=h$. $\square$

Problem 1.5.18

$\Bbbk$ 線形圏 $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}(\Bbbk)$ において，

$$
x = \coprod_{i\in\mathbb{N}} \Bbbk, \quad x_i = \Bbbk\ (i\in\mathbb{N})
$$

とおき，標準直和 $(\overline{\sigma_j} : \mathcal{C}(x,x_j) \to \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i))_{j\in\mathbb{N}}$ の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,x_j) \arrow[r, "\mathcal{C}(x,\sigma_j)"] \arrow[d, "\overline{\sigma_j}"'] & \mathcal{C}\left(x, \coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i\right) \\
\coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i) \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

を考える．ただし，$j\in\mathbb{N}$ で，$\sigma_j : x_j \to \coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i$ は標準入射である．
このとき，線形写像 $\phi : \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i) \to \mathcal{C}(x, \coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i)$ が同型でないことを示せ．

Proof. 線形写像 ϕ は具体的に，

$$
\phi\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i\right) : x \to \coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i, \quad y \mapsto \sum_{i\in I} f_i(y) \quad (f_i \in \mathcal{C}(x,x_i))
$$

で与えられる．

線形写像 $\phi : \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i) \to \mathcal{C}(x,\coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i)$ が全射でないことを示す．

恒等写像 $\mathrm{id}_x \in \mathcal{C}(x, \coprod_{i\in\mathbb{N}} x_i)$ を考え，ある線形写像 $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i)$ によって $\mathrm{id}_x = \phi(f)$ が成り立ったとする（$f_i \in \mathcal{C}(x,x_i)$）．このとき任意の $y_i \in x_i$ $(i\in\mathbb{N})$ について

$$
y_i = \mathrm{id}_x(\sigma_i(y_i)) = \phi(f)(\sigma_i(y_i)) = f_i(\sigma_i(y_i))
$$

となるから，特に $f_i \neq 0$．これは $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i \in \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}(x,x_i)$ に矛盾する．よって ϕ は全射でない． $\square$

Another proof. 線形写像 ϕ が単射でないことを示す．

線形写像 $f_0 \in \mathcal{C}(x,x_0)$ を

$$
f_0(\sigma_i(1_i)) := \begin{cases} 1_0 & (i=1), \\ 0 & (i\neq 1) \end{cases} \quad (i\in\mathbb{N})
$$

となるように定義する．ただし，$1_i \in x_i$ は体 x_i の単位元．

このとき

$$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) : \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i \mapsto f_0(\sigma_0(y_0)) = 0 \quad (y_i \in x_i, i \in \mathbb{N})$$

となるから，$\phi(\overline{\sigma_0}(f_0)) = 0$ である．

一方定義から $f_0 \neq 0$，従って $\overline{\sigma_0}(f_0) \neq 0$．よって ϕ は単射でない． □

§ 1.6 多元環の準同型と線形函手

$\Bbbk$ を体とする．（可換環でもよい．）

Problem 1.6.4

$\mathcal{C}$ を $\Bbbk$ 線形局所小圏とし，$x \in \mathcal{C}_0$ とする．このとき，**Problem 1.2.5** で定義される表現函手は線形函手

$$\mathcal{C}(x, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(\Bbbk),$$
$$\mathcal{C}(-, x) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(\Bbbk)$$

となることを示せ．

Proof. 共変表現函手：

まず $\mathcal{C}(x, -)$ が函手 $\mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(\Bbbk)$ となることを示す．

各対象 $y \in \mathcal{C}_0$ に対して，線形圏の定義より，$\mathcal{C}(x, y)$ はベクトル空間である．また各射 $f \in \mathcal{C}(y, z)$ に対して，射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z)$ が双線形であることから

$$\mathcal{C}(x, f) : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z), \quad g \mapsto f \circ g$$

は線形写像である．よって $\mathcal{C}(x, -)$ は函手 $\mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(\Bbbk)$ となる．

次にこれが線形函手であることを示す．

射 $f, g \in \mathcal{C}(y, z)$ とスカラー $\lambda \in \Bbbk$ を任意に取る．再び射の合成 $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z)$ が双線形であることから，

$$\mathcal{C}(x, f + g) : h \mapsto (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$
$$\mathcal{C}(x, \lambda f) : h \mapsto (\lambda f) \circ h = \lambda(f \circ h)$$

であり，$\mathcal{C}(x, f + g) = \mathcal{C}(x, f) + \mathcal{C}(x, g)$ および $\mathcal{C}(x, \lambda f) = \lambda\mathcal{C}(x, f)$ が分かる．よって $\mathcal{C}(x, -)$ は線形函手．

反変表現函手：

$\mathcal{C}(-, x) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x, -)$ である． □

第 2 章 表現

§ 2.2 多元環と線形圏の加群圏

$\Bbbk$ を可換体（可換環でもよい）とする．また，左加群の圏を $\mathsf{Mod}(X)$，右加群の圏を $\mathsf{Mod}(X^{\mathrm{op}})$ で表す．

Problem 2.2.6

A を多元環，M を左 A 加群とする．I を集合とし，M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える．
このとき，部分空間 $\bigcap_{i\in I} M_i$ と $\sum_{i\in I} M_i$ はともに M の部分加群となる．

Proof. 交叉が部分加群：
元 $m \in \bigcap_{i\in I} M_i$ と $a \in A$ を任意に取る．このときすべての $i \in I$ について $m \in M_i$ で，M_i は M の部分加群だから $am \in M_i$．よって $am \in \bigcap_{i\in I} M_i$ が分かる．
和が部分加群：
$\sum_{i\in I} M_i$ の元

$$\sum_{i\in I} m_i \quad (m_i \in M_i, i \in I)$$

を任意に取ると，有限個の $i \in I$ を除いて $m_i = 0$ だから，$am_i \neq 0$ なる $i \in I$ も有限個である．ただし $a \in A$．よって和 $\sum_{i\in I} am_i \in M$ が定義でき，各 M_i が部分加群だから $am_i \in M_i$ であり，$\sum_{i\in I} am_i \in \sum_{i\in I} M_i$ となる．

□

Problem 2.2.8

A を多元環とし，M を左 A 加群とする．部分集合 $S \subset M$ について，S を含む最小の部分加群を $\langle S\rangle$ と書き，S で生成された M の部分加群と呼ぶ．このとき次を示せ．

i) 部分集合 $S \subset M$ に対して，$\langle S\rangle = \sum_{m\in S} Am$．
ii) 次は同値：
  a) M は A 上有限生成である；
  b) 有限個の M の元 $m_1, \dots, m_n \in M$ が存在して $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける；
  c) ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射準同型 $A^{\sqcup n} \to M$ が存在する．

iii）A が $\Bbbk$ 上有限次元（有限生成）ならば，M が A 上有限生成であることと，$\Bbbk$ 上有限次元であることは同値である．

Proof. (i)

まず，任意の $m \in S$ に対して $m = 1m \in Am$ であるから，$\langle S \rangle \subset \sum_{m \in S} Am$ が成り立つ．

逆に，S を含む任意の部分加群 $L \subset M$ を取ると，各 $m \in S$ に対して $m \in L$ だから $Am \subset L$．よって $\sum_{m \in S} Am \subset L$ となり，$\sum_{m \in S} Am \subset \langle S \rangle$ が従う．

(ii)

(a) $\Longleftrightarrow$ (b)

(i) より明らか．

(b) $\Longrightarrow$ (c)

有限個の M の元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ によって $M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Am_i$ と書けたとする．各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $A_i := A$ とおき，$A^{\sqcup n} = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ とする．

このとき，全射準同型 $\phi : A^{\sqcup n} \to M$ が

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \mapsto \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i m_i \quad (a_i \in A_i, i \in I)$$

によって定義できる．

(c) $\Longrightarrow$ (b)

ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と全射準同型 $\phi : A^{\sqcup n} \to M$ が存在したとする．各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $A_i := A$ とおき，$A^{\sqcup n} = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ とする．

このとき，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $m_i := \phi(1_i)$ とおけば

$$M = \phi\left(A^{\sqcup n}\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \phi(A_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Am_i.$$

ただし，$1_i \in A_i$ は A_i の単位元を表す．

(iii) M を $\Bbbk$ 上有限生成だとすると，多元環 $\Bbbk$ について (ii) を用いて，

$$M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n$$

なる元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ が存在し，$M = \Bbbk m_1 + \cdots + \Bbbk m_n \subset Am_1 + \cdots + Am_n \subset M$ より $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ を得る．よって M は A 上有限生成．

逆に M が A 上有限生成ならば有限個の元 $m_1, \ldots, m_n \in M$ を用いて $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ と書ける．同様に A が $\Bbbk$ 上有限生成だから，有限個の元 $a_1, \ldots, a_\ell \in A$ によって $A = \Bbbk a_1 + \cdots + \Bbbk a_\ell$ と書ける．

すると

$$M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Am_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \Bbbk a_j m_i$$

となるから，M は $\Bbbk$ 上有限生成である． □

PROBLEM 2.2.12

A を多元環とする．圏 Mod(A) の射が，写像の意味で単射であることと，圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ．また，写像の意味で全射であることと，圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ．

Proof. 圏 Mod(A) における射 $f : M \to N$ を任意に取る．

単射ならばモノ射：

射 f を単射とし，ある射 $g, h : L \to M$ について $f \circ g = f \circ h$ が成り立ったとする．

このとき任意の $m \in L$ に対して $f(g(m)) = f(h(m))$ であり，f が単射だから $g(m) = h(m)$)．よって $g = h$ となり，f はモノ射．

モノ射ならば単射：

M の部分空間 $\mathrm{Ker}\, f \subset M$ は部分加群であり，二つの射

$$\begin{aligned} \ker f : \mathrm{Ker}\, f \to M, &\qquad m \mapsto m, \\ 0 : \mathrm{Ker}\, f \to M, &\qquad m \mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $f \circ \ker f = 0 = f \circ 0$ であり，f がモノ射だから $\ker f = 0$ を得る．よって $\mathrm{Ker}\, f = 0$ となり，f は単射.

全射ならばエピ射：

射 f を全射とし，ある射 $g, h : N \to L$ について $g \circ f = h \circ f$ が成り立ったとする．

このとき f が全射だから任意の $n \in N$ に対して $n = f(m)$ なる $m \in M$ が存在し，$g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n)$．よって $g = h$ となり，f はエピ射.

エピ射ならば全射：

N の部分空間 $\mathrm{Im}\, f \subset N$ は部分加群であり，商加群 $\mathrm{Coker}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$ を考えると，二つの射

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}\, f : N \to \mathrm{Coker}\, f, &\qquad n \mapsto n + \mathrm{Im}\, f, \\ 0 : N \to \mathrm{Coker}\, f, &\qquad n \mapsto 0 \end{aligned}$$

が存在する．今 $\mathrm{coker}\, f \circ f = 0 = 0 \circ f$ であり，f がエピ射だから $\mathrm{coker}\, f = 0$ を得る．よって $N = \mathrm{Im}\, f$ となり，f は全射. □

PROBLEM 2.2.13

A を多元環とする．圏 Mod(A) において，直積と直和がそれぞれ積と余積になることを示せ．

Proof. I を小集合，$(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とする．

直積が積：

$M := \prod_{i \in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\pi_i : M \to M_i$ を標準射影とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\rho_i : N \to M_i)_{i \in I}$ が与えられたとき，準同型 $f : N \to M$ が

$$f(n) := (\rho_i(n))_{i \in I} \quad (n \in N)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & M \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g : N \to M$ 存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$\pi_i(g(n)) = \rho_i(n) = \pi_i(f(n)) \quad (n \in N, i \in I)$$

より，$g(n)$ の第 i 成分と $f(n)$ の第 i 成分は各 $i \in I$ で等しくなり，$g(n) = f(n)$ が言える．よって $g = f$.

直和が余積：

$M := \coprod_{i\in I} M_i$ とおく．各 $i \in I$ について $\sigma_i : M_i \to M$ を標準入射とする．

A 加群 N と準同型の族 $(\tau_i : M_i \to N)_{i\in I}$ が与えられたとき，準同型 $f : M \to N$ が

$$f(m) := \sum_{i\in I} \tau_i(m_i) \quad (m \in M_i)$$

によって定まる．このとき図式

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\tau_i"] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

は各 $i \in I$ について可換になる．

逆にある準同型 $g : M \to N$ が存在してすべての $i \in I$ に対して上の図式を可換にできたならば，等式

$$g(\sigma_i(m)) = \tau_i(m) = f(\sigma_i(m)) \quad (m \in M_i, i \in I)$$

より，任意の $m \in M$ に対して $g(m) = \sum_{i\in I} g(\sigma_i(m_i)) = \sum_{i\in I} f(\sigma_i(m_i)) = f(m)$ となる．よって $g = f$. □

PROBLEM 2.2.15

A を多元環，$M \in \mathsf{Mod}(A)_0$ とする．このとき次が同値であることを示せ．

i）圏 $\mathsf{Mod}(A)$ において，$M \cong M_1 \sqcup M_2$（外部直和）ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

ii）M の部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ に対して，$M = M_1 \oplus M_2$（内部直和）ならば $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii)

$M = M_1 \oplus M_2$ なる部分加群 $M_1, M_2 \subset M$ が存在すれば，内部直和の定義より，$M \cong M_1 \sqcup M_2$ となる．よって $M_1 = 0$ または $M_2 = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

A 加群 M_1, M_2 が存在して $M \cong M_1 \sqcup M_2$ となったとする．この同型を $\phi : M_1 \sqcup M_2 \to M$ とおけば，$\phi(M_1)$ と $\phi(M_2)$ はともに M の部分加群で，$M = \phi(M_1) \oplus \phi(M_2)$ となる．実際，$M = \phi(M_1 \sqcup M_2) = \phi(M_1) + \phi(M_2)$ で，$\phi(M_1) \cap \phi(M_2) = \phi(M_1 \cap M_2) = 0$ である．

よって $\phi(M_1)=0$ または $\phi(M_2)=0$ となるが，ϕ は単射だから $M_1=0$ または $M_2=0$.

□

Problem 2.2.19

$\mathcal{C}$ を線形圏とする．圏 $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ の射が，写像の族の意味で単射であることと，圏の意味でモノ射であることは同値であることを示せ．また，写像の族の意味で全射であることと，圏の意味でエピ射であることも同値であることを示せ．

Proof. 圏 $\mathrm{Mod}(\mathcal{C})$ における射 $\alpha : M \to N$ を任意に取る．**Problem 2.2.12** で $A=\Bbbk$ としたものを断り無く使う．

単射ならばモノ射：

射 $\beta,\gamma : L \to M$ が存在して $\alpha\circ\beta=\alpha\circ\gamma$ となったとする．

このとき各 $x\in\mathcal{C}_0$ に対して $\alpha_x\circ\beta_x=\alpha_x\circ\gamma_x$ が成り立つ．α は単射だから α_x も単射，従ってモノ射となり，$\beta_x=\gamma_x$ を得る．よって $\beta=\gamma$ となり，α はモノ射．

モノ射ならば単射：

部分空間族 $(\mathrm{Ker}(\alpha_x)\subset M(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ によって定義される M の部分加群を $\mathrm{Ker}\,\alpha$ と表す．$\mathrm{Ker}\,\alpha=0$ を言えばよい．

包含射 $\mathrm{Ker}\,\alpha\to M$ を $\ker\alpha=(\ker\alpha_x : \mathrm{Ker}\,\alpha_x\to M(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ とおく．このとき $\alpha\circ\ker\alpha=0=\alpha\circ 0$ であり，α はモノ射だから $\ker\alpha=0$．よって $\mathrm{Ker}\,\alpha=0$ となり，各 α_x は単射である．

全射ならばエピ射：

射 $\beta,\gamma : N\to L$ が存在して $\beta\circ\alpha=\gamma\circ\alpha$ となったとする．

このとき各 $x\in\mathcal{C}_0$ に対して $\beta_x\circ\alpha_x=\gamma_x\circ\alpha_x$ が成り立つ．α は全射だから α_x も全射，従ってエピ射となり，$\beta_x=\gamma_x$ を得る．よって $\beta=\gamma$ となり，α はエピ射．

エピ射ならば全射：

商空間族 $(N(x)\to\mathrm{Coker}(\alpha_x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ によって定義される N の商加群を $\mathrm{Coker}\,\alpha$ と表す．$\mathrm{Coker}\,\alpha=0$ を言えばよい．

射影射 $N\to\mathrm{Coker}\,\alpha$ を $\mathrm{coker}\,\alpha=(\mathrm{coker}\,\alpha_x : N(x)\to\mathrm{Coker}\,\alpha_x)_{x\in\mathcal{C}_0}$ とおく．このとき $(\mathrm{coker}\,\alpha)\circ\alpha=0=0\circ\alpha$ であり，α はエピ射だから $\mathrm{coker}\,\alpha=0$．よって $\mathrm{Coker}\,\alpha=0$ となり，各 α_y は全射である． □

Problem 2.2.23

$\mathcal{C}$ を線形圏とし，$M\in\mathrm{Mod}(\mathcal{C})_0$ とする．I を集合とし，M の部分加群族 $(M_i)_{i\in I}$ を考える．

このとき，部分空間の族 $\bigcap_{i\in I}M_i := (\bigcap_{i\in I}M_i(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ と $\sum_{i\in I}M_i := (\sum_{i\in I}M_i(x))_{x\in\mathcal{C}_0}$ はそれぞれ M の部分加群を定めることを示せ．

Proof. 圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : x \to y$ について

$$M(f)\left(\bigcap_{i\in I} M_i(x)\right) \subset \bigcap_{i\in I} M_i(y),$$
$$M(f)\left(\sum_{i\in I} M_i(x)\right) \subset \sum_{i\in I} M_i(y)$$

がそれぞれ成り立つことを示せばよい.

交叉が部分加群：

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\bigcap_{i\in I} M_i(x)) \subset \bigcap_{i\in I} M(f)(M_i(x)) \subset \bigcap_{i\in I} M_i(y)$ が言える.

和が部分加群：

任意の $i \in I$ に対して, M_i は M の部分加群だから $M(f)(M_i(x)) \subset M_i(y)$ となる. よって $M(f)(\sum_{i\in I} M_i(x)) = \sum_{i\in I} M(f)(M_i(x)) \subset \sum_{i\in I} M_i(y)$ が言える. □