Proposition 0.0.1

$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ を圏とする．
函手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は圏同値ならば忠実．

Proof. 函手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を圏同値とすると，ある函手 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が存在して $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ および $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ が成り立つ．

$\alpha\colon G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ を自然同型とする．

圏 $\mathcal{A}$ における射 $f, g\colon A \to A'$ を任意に取り，$F(f) = F(g)$ が成り立つとする．可換図式

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "(G\circ F)(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
(G \circ F)(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(G \circ F)(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "(G\circ F)(g)"'] & A \arrow[d, "g"] \\
(G \circ F)(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}$$

を考えると，

$$\boxed{f \circ \alpha_A} = \alpha_{A'} \circ \left(\underbrace{(G \circ F)(f)}_{=F(g)} \right) = \alpha_{A'} \circ \left((G \circ F)(g) \right) = \boxed{g \circ \alpha_A}$$

が得られる．

今自然変換 $\alpha\colon G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ は自然同型だから，射 $\alpha_A\colon (G \circ F)(A) \to A$ は同型射であり，$\alpha_A^{-1}\colon A \to (G \circ F)(A)$ が存在する．よって

$$f = \boxed{f \circ \alpha_A} \circ \alpha_A^{-1} = \boxed{g \circ \alpha_A} \circ \alpha_A^{-1} = g.$$

□

Proposition 0.0.2

$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ を圏とする．
函手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は圏同値ならば充満．

Proof. 函手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を圏同値とすると，ある函手 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が存在して $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ および $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ が成り立つ．

$\alpha\colon G \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ を自然同型とする．

圏 $\mathcal{A}$ における射 $g\colon A \to A'$ と圏 $\mathcal{B}$ における射 $f\colon F(A) \to F(A')$ を任意に取る．射 $\alpha_A\colon (G \circ F)(A) \to A$ および $\alpha_{A'}\colon (G \circ F)(A') \to A'$ が同型射であることに注意して，可換図式

$$\begin{tikzcd} (G\circ F)(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "(G\circ F)(g)"'] & A \arrow[d, "g"] \\ (G\circ F)(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & A' \end{tikzcd} \qquad g\circ\alpha_A = \alpha_{A'}\circ((G\circ F)(g))$$

から

$$((G\circ F)(g)) = \alpha_{A'}^{-1}\circ \boxed{\ g\ } \circ \alpha_A$$

を得る．特に $g = \alpha_{A'}\circ G(f)\circ\alpha_A^{-1}$ と置けば，

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ G(F(g))}}{((G\circ F)(g))} = \alpha_{A'}^{-1}\circ \boxed{\left(\alpha_{A'}\circ G(f)\circ\alpha_A^{-1}\right)} \circ \alpha_A = G(\ f\ )$$

となる．

上の **Proposition 0.0.1** より圏同値 $G\colon \mathcal{B}\to\mathcal{A}$ は忠実だから，$f = F(g)$ となる． □