微分方程式の解の一意性と Gronwall の補題

なっふぃ

@naughiez

§ 1.1 Gronwall の補題

以下，$I = [a, b]$ を閉区間（$[a, \infty)$ という形でも良い）として，$I^\circ = (a, b)$ をその内部とする．t の値として，I の端点 $t = a, b$ を含むかどうかには注意しよう．

Gronwall の補題にはいくつかバリエーションがあるが，ここでは以下のものを考える．

Proposition 1.1.1（Gronwall の補題）

I 上の連続関数 $f, g \to \mathbb{R}$ が条件

$$f'(t) \leqslant g(t) f(t) \quad (t \in I^\circ)$$

を満たすとき，

$$f(t) \leqslant f(a) \exp \int_a^t g(s) \, \mathrm{d}s \quad (t \in I)$$

が成り立つ．（f の $t = a, b$ における微分可能性は仮定していない．）

Proof. 関数 $h : I \to \mathbb{R}$ を

$$h(t) = \exp \int_a^t g(s) \, \mathrm{d}s$$

で定義すると，（$h(t) > 0$ に注意して）結論は

$$\frac{f(t)}{h(t)} \leqslant f(a) \quad (t \in I)$$

と言い換えることができる．さらに，$h(a) = \mathrm{e}^0 = 1$ であるから，

$$\frac{f(t)}{h(t)} \leqslant \frac{f(a)}{h(a)} \quad (t \in I)$$

とも言い換えられる．

今，仮定と定義より，任意の $t \in I^\circ$ に対して

$$
\begin{aligned}
f'(t)h(t) &\leqslant f(t)g(t)h(t), \\
f(t)h'(t) &= f(t)g(t)h(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つから，

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{f(t)}{h(t)} = \frac{f'(t)h(t) - f(t)h'(t)}{h(t)^2} \leqslant 0
$$

となる．

すると，平均値の定理より，任意の $t \in (a, b]$ に対してある $c \in (a, t)$ $(\subseteq I^\circ)$ が存在して，

$$
\frac{f(t)}{h(t)} - \frac{f(a)}{h(a)} = (t-a)\left(\frac{f}{h}\right)'(c) \leqslant 0
$$

が分かる．従って，任意の $t \in (a, b]$ に対して

$$
\frac{f(t)}{h(t)} \leqslant \frac{f(a)}{h(a)}
$$

となる．これは $t = a$ においても成立する． □

§ 1.2 微分方程式の解の一意性

上記の Gronwall の補題を用いて，正規形の常微分方程式の解の一意性を証明する．（存在は，Picard の逐次近似法や Cauchy の折れ線法で確かめられる．）

PROPOSITION 1.2.1

$J \subseteq \mathbb{R}$ をある（連結な）部分集合とする．
正規形と呼ばれる，次の初期値問題を考える：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= f(t, x(t)), \quad (t \in I^\circ), \\
x(a) &= x_0.
\end{aligned}
$$

ただし，$f : I^\circ \times J \to \mathbb{R}$ は連続関数で，次の条件（**各時刻で Lipschitsz 連続**）を満たす：

- ある定数 $L > 0$ が存在して，任意の $t \in I^\circ$ と任意の $x_1, x_2 \in J$ に対して，

$$
|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|.
$$

この初期値問題の**解**とは，連続関数 $x : I \to J$ であって，与えられた等式を満たすもののことである．
（端点 $t = a, b$ での微分可能性は仮定しない．）
このとき，上の初期値問題の解は存在すれば一意である．

Proof. 解が二つ存在したとして，それらを $x_1, x_2 : I \to J$ とする．

$$y(t) \coloneqq (x_1(t) - x_2(t))^2$$

と置いて，$y(t) \equiv 0$ を示す．

　まず次の不等式が示されたと仮定しよう：

$$y'(t) \leqslant 2Ly(t), \quad (t \in I^\circ). \tag{*}$$

すると，Gronwall の補題を $f = y$，$g = 2L$ として適用すると，

$$y(t) \leqslant y(a)\mathrm{e}^{2L(t-a)} = 0$$

を得る．一方定義より $y(t) \geqslant 0$ でもあったから，$y(t) \equiv 0$ が従う．

　(*) を示そう．y の定義より，任意の $t \in I^\circ$ で $y'(t) = 2(x_1'(t) - x_2'(t)) \cdot (x_1(t) - x_2(t))$ が成り立つ．また，x_1, x_2 が与えられた微分方程式を満たすことと，f の（x に関する）Lipschitsz 連続性から，

$$\left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| = |f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leqslant L|x_1(t) - x_2(t)|$$

が成り立つ．従って

$$y'(t) \leqslant \left|y'(t)\right| = 2\left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \cdot |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant 2Ly(t)$$

となり，(*) が言えた． □