正規形漸化式の解法についての理論的背景

なっふぃ

@naughiez

Contents

第 1 章　予備知識

以下，ベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．

ここでは，以下の理論に必要な代数系について述べる．代数系についての知識がある読者は，読み飛ばしても構わない．

§ 1.1 代数

Definition 1.1.1

A をベクトル空間とする．A が積 $A \times A \to A$ によって可環環になり[*1]，それが $\mathbb{C}$ 上双線型であるとき（積が線型写像 $A \otimes A \to A$ を定めるとき），A を $\mathbb{C}$ 上の**代数**（*algebra*）と呼ぶ．

代数の間の線型写像 $A \to B$ は，それが同時に環準同型でもあるとき，**代数準同型**（*algebra homomorphism*）と呼ばれる．とくに誤解の恐れのない場合は単に準同型と言う．

Definition 1.1.2

A を代数，V をベクトル空間とする．

V 上に A によるスカラー倍 $A \otimes V \to V$ が定まっていて，ベクトル空間と同様の公理

i）$a(bv) = (ab)v$（$a, b \in A$，$v \in V$），

ii）$1v = v$（$v \in V$）

を満たすとき，V を A **加群**（*A-module*）と言う．

A 加群の間の A **準同型**（*A-homomorphism*）とは，A によるスカラー倍を保つような線型写像のことである．V から W への A 準同型全体のなすベクトル空間を $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ と書く．これも再び A 加群となる．

---

*1 一般には可環である必要はないが，§1.2 以降で現れる代数はすべて可環である．

REMARK 1.1.1　代数準同型 $f : A \to B$ があるとき，スカラー倍 $A \otimes B \to B$ が

$$a \cdot b := f(a)b \quad (a \in A, b \in B)$$

で定義できる．これにより，B は自然に A 加群の構造を持つ．

DEFINITION 1.1.3

代数 A について，A の可逆元全体のなす集合を

$$A^\times := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

と書き，A の**単元群**（*unit group*）と言う．それに伴い，可逆元のことを**単元**（*unit*）とも呼ぶ．
単元群 $A^\times$ は群となる．

§ 1.2 Lie 代数とその表現

DEFINITION 1.2.1

ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上に**ブラケット**（*bracket*）と呼ばれる二項演算 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が定義されていて，次の性質を満たすとき，$\mathfrak{g}$ を **Lie 代数**（*Lie algebra*）と言う：

i）歪対称性 $[x,x] = 0$（$x \in \mathfrak{g}$），
ii）Jacobi 恒等式 $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$（$x,y,z \in \mathfrak{g}$）．

Lie 代数の間の線型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ がブラケットを保つ，すなわち $[f(x), f(y)] = f([x,y])$ が成り立つとき，これを **Lie 代数準同型**（*Lie algebra homomorphism*），あるいは単に準同型と呼ぶ．

REMARK 1.2.1　歪対称性は，任意の $x,y \in \mathfrak{g}$ に対して $[x,y] = -[y,x]$ が成り立つことと同値である．また，歪対称性を仮定したとき，Jacobi 恒等式は

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \quad (x,y,z \in \mathfrak{g})$$

と書くこともできる．

EXAMPLE 1.2.1　　i）（非可換）代数 A は，ブラケットを $[a,b] := ab - ba$ で定義するとき，Lie 代数となる．
ii）とくに，ベクトル空間 V 上の線型作用素のなす代数 $\mathrm{End}\, V$ は Lie 代数となる．これが（代数ではなく）Lie 代数であることを強調するため，$\mathrm{End}\, V$ の代わりに $\mathfrak{gl}\, V$ と表す．
iii）Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，準同型 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が $\mathrm{ad}(x) : y \mapsto [x,y]$ によって定義できる．ad がたしかに準同型であることは，**REMARK 1.2.1** から従う．

Definition 1.2.2

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とベクトル空間 V について，Lie 代数準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\, V$ を $\mathfrak{g}$ の**表現**（*representation*）と呼ぶ．単に V を $\mathfrak{g}$ の表現と呼ぶことも多い．また，表現を $\mathfrak{g}$ **加群**（$\mathfrak{g}$-*module*）とも呼ぶ．
表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\, V$ があるとき，$x \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ に対して $\rho(x)v \in V$ という元が定まる．ρ を明示する必要のない場合は，これを

$$\rho(x)v = x \cdot v = xv$$

のようにも表す．さらに，V の（空でない）部分集合 $S \subset V$ に対して，$x \in \mathfrak{g}$ による**軌道**（*orbit*）を

$$\rho(x)S = xS := \{\rho(x)s \mid s \in S\}$$

と，$\mathfrak{g}$ 全体による軌道を

$$\rho(\mathfrak{g})S = \mathfrak{g}S := \bigcup_{x \in \mathfrak{g}} \rho(x)S$$

と表す．

Remark 1.2.2 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\, V$ があるとき，線型写像 $\mu : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ が $\mu(x \otimes v) := \rho(x)v$ で定まる．逆に線型写像 $\mu : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ が $\mu([x,y] \otimes v) = \mu(x, \mu(y,v)) - \mu(y, \mu(x,v))$ を満たすとき，$\mathfrak{g}$ の表現 ρ を $\rho(x) : v \mapsto \mu(x,v)$ と定義できる．

Example 1.2.2 i）$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を用いて $\mathfrak{g}$ をそれ自身の表現と見做すことができる．これを**随伴表現**（*adjoint representation*）と言う．

Definition 1.2.3

$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\, V$，$\rho' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\, V'$ をともに Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．線型写像 $f : V \to V'$ が $\mathfrak{g}$ の作用を保つ，つまり $f(\rho(x)v) = \rho'(x)f(v)$ を満たすとき，f を表現の**準同型**（*homomorphism*）と言う．
表現 V の部分空間 $W \subset V$ は，$\mathfrak{g}$ の作用で閉じている $\mathfrak{g}W \subset W$ とき，V の**部分表現**（*subrepresentation*）あるいは**部分 $\mathfrak{g}$ 加群**（$\mathfrak{g}$-*submodule*）と呼ばれる．
部分表現による商空間 V/W への $\mathfrak{g}$ の作用が，自然に

$$\overline{\rho}(x)(v + W) := \rho(x)v + W \quad (x \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

で定義できる．この表現 $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ を V の W による**商表現**（*quotient representation*）あるいは**商加群**（*quotient* $\mathfrak{g}$-*module*）と呼ぶ．このとき自然な射影 $V \twoheadrightarrow V/W$ は表現の準同型となる．

DEFINITION 1.2.4

$\mathfrak{g}$ をそれ自身の随伴表現と見たとき，部分表現を**イデアル**（*ideal*），商表現を**商 Lie 代数**（*quotient Lie algebra*）と呼ぶ．

PROPOSITION 1.2.1

表現の準同型 $f: V \to W$ に対して，次が成り立つ：

i）f の**核**（*kernel*）$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$ は V の部分表現である；
ii）f の**像**（*image*）$\operatorname{Im} f = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$ は W の部分表現である；
iii）表現としての準同型定理 $V/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$.

Proof. 証明はベクトル空間のときと同じであるから省略する． □

PROPOSITION 1.2.2

$\mathfrak{g}$ を Lie 代数，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{g}$ の表現 V の部分表現 $W \subset V$ について，$\mathfrak{a}W \subset W$ が成り立つならば（$\mathfrak{g}$ の）商表現 V/W は商 Lie 代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の表現となる．

Proof. $\mathfrak{a}W \subset W$ より，線型写像 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \otimes V/W \to V/W$ が well-defined に定まる． □

DEFINITION 1.2.5

$\mathfrak{g}$ の 0 でない表現 $V \neq 0$ が $0, V \subset V$ 以外に部分表現を持たないとき，V を**既約**（*irreducible*）表現あるいは**単純**（*simple*）$\mathfrak{g}$ 加群である言う．

PROPOSITION 1.2.3（Schur の補題）

表現の 0 でない準同型 $f: V \to W$ について，次が成り立つ：

i）V が既約ならば f はつねに単射；
ii）W が既約ならば f はつねに全射；
iii）V と W がともに既約ならば f はつねに全単射.

Proof. V が既約であれば，V の部分表現 $\operatorname{Ker} f$ は 0 または V でなければならないが，$f \neq 0$ という仮定により $\operatorname{Ker} f = 0$ が分かる．他の主張も同様に示せる． □

§ 1.3 Laurent 多項式環と冪級数環

Definition 1.3.1

V をベクトル空間とする．z を変数とする V 係数の（形式的）**Laurent 多項式環**（*Laurent polynomial ring*）[*2]を

$$V\left[z^{\pm 1}\right] := \left\{ \sum_{n=p}^{d} a_n z^n \,\middle|\, p, d \in \mathbb{Z}, a_n \in V \right\}$$

で定義する．また Laurent 多項式 $a(z) = \sum_{n=p}^{d} a_n z^n V[z^{\pm 1}]$ に対して，

$$\begin{aligned} \deg a(z) &:= \max\{0\} \cup \{p \leqslant n \leqslant d \mid a_n \neq 0\}, \\ \operatorname{ord} a(z) &:= -\min\{0\} \cup \{p \leqslant n \leqslant d \mid a_n \neq 0\} \end{aligned}$$

をそれぞれ $a(z)$ の**次数**（*degree*），**位数**（*order*）と言う．
$V = A$ が代数のとき，Laurent 多項式環上に積

$$\left(\sum_{m=p}^{d} a_m z^m\right)\left(\sum_{n=p'}^{d'} b_n z^n\right) := \sum_{\ell=p+p'}^{d+d'} \left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n\right) z^\ell$$

が定義できる．これにより $A[z^{\pm 1}]$ は代数となる．

Proposition 1.3.1

ベクトル空間として，

$$V \otimes \mathbb{C}\left[z^{\pm 1}\right] \cong V\left[z^{\pm 1}\right]$$

という自然な同型が成立する．この同型は具体的には，$v \otimes \sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で与えられる．

Proof. 写像 $(v, \sum_n a_n z^n) \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ は双線型であるから，線型写像 $V \otimes \mathbb{C}\left[z^{\pm 1}\right] \to V\left[z^{\pm 1}\right]$ が存在する．逆写像は

$$\sum_{n=p}^{d} a_n z^n \mapsto \sum_{n=p}^{d} (a_n \otimes z^n)$$

とすれば良い．ただし，右辺の z^n は $z^n \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ と見做している． □

[*2] V が環でなければ $\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ も環にはならないが，呼称の単純化のために多項式環と呼ぶことにする．

DEFINITION 1.3.2

V をベクトル空間とする．z を変数とする V 係数の（形式的）**冪級数環**（*power series ring*）を

$$V[\![z]\!] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

で定義する．

$V = A$ が代数のとき，冪級数環上に積

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) := \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{m+n=\ell} a_m b_n\right) z^{\ell}$$

が定義できる．これにより $A[\![z]\!]$ は代数となる．

PROPOSITION 1.3.2

A を代数として，任意の冪級数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in A[\![z]\!]$ を取る．もし定数項 $a_0 = a(0)$ が A の単元であれば，$a(z)^{-1} \in A[\![z]\!]$ も存在する．具体的には，$a(z)^{-1} = \sum_n b_n z^n$ と置くとき

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_n &= -b_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

によって帰納的に求まる．

とくに，$A[\![z]\!]$ の単元群が

$$A[\![z]\!]^{\times} = A^{\times} + A[\![z]\!]z$$

と求まる．

Proof. $\sum_n b_n z^n$ を上で定義したとき，$(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$ を示せば良い． □

EXAMPLE 1.3.1 i）$a \in A^{\times}$ が単元のとき，任意の $n \geqslant 0$ に対して

$$(a+z)^{-n} = a^{-n} - n a^{-n-1} z + O(z^2)$$

が成り立つ．

Proposition 1.3.3

線型写像 $f : U \otimes V \to W$ があるとき，線型写像 $\tilde{f} : U[\![z]\!] \otimes V[\![z]\!] \to W[\![z]\!]$ が

$$\tilde{f}\left(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n\right) := \sum_d \left(\sum_{m+n=d} f(a_m \otimes b_n)\right) z^d$$

で定義できる．

Proof. 写像 $(\sum_m a_m z^m \otimes \sum_n b_n z^n) \mapsto \sum f(a_m \otimes b_n) z^d$ が双線型であるから良い． □

Corollary 1.3.4

$\mathfrak{g}$ が Lie 代数のとき，ブラケット $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を冪級数環上へ拡大することで，冪級数環 $\mathfrak{g}[\![z]\!]$ もまた Lie 代数となる．

Proof. 歪対称性は明らか．Jacobi 恒等式も定義通り愚直に計算すれば従う． □

Corollary 1.3.5

V が Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現のとき，$\mathfrak{g}$ の作用 $\mathfrak{g} \otimes V \to V$ を冪級数環へ拡大することで，$V[\![z]\!]$ が $\mathfrak{g}[\![z]\!]$ の表現となる．

Proof. 計算は省略する． □

第 2 章　正規形漸化式の解空間について

§ 2.1 母関数

Definition 2.1.1

V をベクトル空間とするとき，V 値の形式的 Laurent 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ を数列 $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ の**母関数**（*generating function*）と呼ぶ．母関数全体のなすベクトル空間を

$$V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \;\middle|\; a_n \in V \right\}$$

と表す．

二変数以上の級数も同様に定義される：

$$V\left[\!\left[w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} w^m z^n \;\middle|\; a_{m,n} \in V \right\},$$

$$V\left[\!\left[w^{\pm 1}, x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}\right]\!\right] := \left\{ \sum_{k,\ell,m,n\in\mathbb{Z}} a_{k,\ell,m,n} w^k x^\ell y^m z^n \;\middle|\; a_{k,\ell,m,n} \in V \right\},$$

etc.

Laurent 級数のなすベクトル空間 $V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ は，ベクトル空間としては数列のなす空間

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}, V) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \in V\}$$

と同型になる．単なる数列との違いは，複素関数に由来する諸々の操作を持つところである．

Definition 2.1.2

母関数 $a(z) = \sum a_n z^n \in V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ の**留数**（*residue*）を

$$\mathrm{Res}_z\, a(z) := a_{-1}$$

で定義する．

DEFINITION 2.1.3

ベクトル空間 U, V, W について，U, V の間のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : U \otimes V \to W$（すなわち，$U \times V \to W$ の双線型写像）があるとき，母関数の積を自然に定義できる．具体的には，U 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n \in U\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と V 値母関数 $b(z) = \sum_m b_m z^m \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ に対して，

$$a(z)b(z) := \sum_{d\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} \langle a_n, b_m\rangle \right) z^d \in W\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$$

で定義する．ただし，すべての z^d の係数 $\sum\langle a_n, b_m\rangle$ が有限和であるような $a(z), b(z)$ の組に限る．無限和のときは定義しない．

このような（積を定義できる）母関数 $a(z), b(z)$ に対して，その積の留数を

$$\langle a(z), b(z)\rangle := \mathrm{Res}_z\, a(z)b(z) \in W$$

と書く．

この定義は，$\mathbb{C}$ 値関数の内積

$$\langle \varphi(x), \psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)^* \psi(x) \mathrm{d}x$$

に由来する．

EXAMPLE 2.1.1 i）代数 A 上の加群 V には，自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \otimes A \to V$（単なるスカラー倍の構造射）がある．これによって，V 値母関数 $a(z) \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と A 値 Laurent 多項式 $b(z) \in A[z^{\pm 1}]$ との積を定義できる：

$$a(z)b(z) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n+m=d} b_m \cdot a_n \right) z^d \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket.$$

これは任意の $a(z) \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ および $b(z) \in A[z^{\pm 1}]$ に対して定義できることに注意.

ii）二変数の Laurent 級数は Laurent 級数値の母関数とみなすことができる：$V\llbracket w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket = V\llbracket w^{\pm 1}\rrbracket\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$．さらに，$V = A$ が代数のとき，異なる変数の母関数のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle : A\llbracket x^{\pm 1}\rrbracket \otimes A\llbracket y^{\pm 1}\rrbracket \to A\llbracket x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\rrbracket$ を自然に

$$\left\langle \sum_m a_m x^m, \sum_n b_n y^n \right\rangle := \sum_{m,n} (a_m b_n) x^m y^n$$

で定義できる．これによって，$A\llbracket x^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket$ と $A\llbracket y^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket$ の積を考えることができる．積は三変数 x, y, z の母関数となる．

iii）V 値母関数のなすベクトル空間について，線型写像 $V \otimes \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ が $v \otimes \sum_n a_n z^n \mapsto \sum_n (a_n v) z^n$ で定まる．ここから $V\llbracket w^{\pm 1}\rrbracket \otimes \mathbb{C}\llbracket w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket \to V\llbracket w^{\pm 1}, z^{\pm 1}\rrbracket$ が誘導される．

もっとも重要な Laurent 級数の一つは Dirac のデルタ関数である．

Definition 2.1.4

二変数の $\mathbb{C}$ 値母関数

$$\delta(z,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n}w^{n-1} \in \mathbb{C}\left[\!\left[w^{\pm1}, z^{\pm1}\right]\!\right]$$

を**デルタ関数**（*delta function*）と呼ぶ．この式は

$$\delta(z,w) = \sum_n z^n w^{-n-1} = \sum_n z^{n-1}w^{-n} = \sum_n z^{-n-1}w^n = \sum_{m+n=-1} z^m w^n$$

のように様々な形で表すことができる．
誤解の恐れのない場合は $\delta(z-w) = \delta(z,w)$ のようにも書く．

Proposition 2.1.1

デルタ関数について，次の性質が成り立つ．

i）任意の V 値母関数 $a(z) \in V\left[\!\left[z^{\pm1}\right]\!\right]$ に対して $a(z)\delta(z-w) = a(w)\delta(z-w)$.
ii）任意の V 値母関数 $a(z) \in V\left[\!\left[z^{\pm1}\right]\!\right]$ に対して $\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = a(w)$.

この命題は，通常のデルタ関数の性質 $\int a(z)\delta(z-w)\,\mathrm{d}z = a(w)$ 等を母関数の言葉で書き直したものになっている．

Proof. いずれも簡単な計算で示すことができる．ここでは後者のみ確かめる．
V 値母関数 $a(z) = \sum_n a_n z^n$ に対して，

$$\begin{aligned} a(z)\delta(z-w) &= \left(\sum_m a_m z^m\right)\left(\sum_n z^{-n-1}w^n\right) \\ &= \sum_d \left(\sum_n a_{n+d+1}w^n\right) z^d \end{aligned}$$

となるから，留数を取ると

$$\mathrm{Res}_z\, a(z)\delta(z-w) = \sum_n a_n w^n = a(w)$$

が分かる． □

§ 2.2 シフト演算子

数列の漸化式は，$p : (a_n) \mapsto (a_{n+1})$ というシフト演算子を用いて書くことができる．ここでは，シフト演算子の母関数表示とその性質について見ていく．

Definition 2.2.1

V をベクトル空間とする．$pa(z) = z^{-1}a(z)$ で定まる線形演算子 $p : V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を $V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ 上の**シフト演算子**（*shifting operator*）と呼ぶ．

微分演算子とのアナロジーを踏まえると，$[p, q] = 1$ を満たす演算子 q を考えたい．これを見つけるために，量子力学の手続きを踏襲する．

Proposition 2.2.1

$V = \mathbb{C}$ とする．
0 を除く任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して，λ を固有値とする p の固有ベクトルが（スカラー倍を除いて）一意に存在する．この固有ベクトルのうち z^0 の係数が 1 であるものを $|\lambda\rangle$ と書く．

Proof. $a(z) = \sum_n a_n z^n \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ が固有値 λ に属する p の固有ベクトルであるとすると，

$$0 = (p - \lambda)a(z) = \sum_n a_{n+1} z^n - \lambda \sum_n a_n z^n = \sum_n (a_{n+1} - \lambda a_n) z^n$$

より $a_{n+1} = \lambda a_n$ が従う．よって，$a(z) = a_0 \sum_n \lambda^n z^n$ となる． □

量子力学と同じように，任意の母関数は $|\lambda\rangle$ によってスペクトル分解（固有値分解）をすることができる．
まず $|\lambda\rangle$ を $|\lambda\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\rrbracket$ と見做し，$|\mu\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}\rrbracket$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\big\langle |\mu\rangle, |\lambda\rangle \big\rangle &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \mu^m z^m\right)\left(\sum_n \lambda^n z^n\right) \\ &= \sum_{m+n=-1} \mu^m \lambda^n \\ &= \delta(\lambda - \mu) \in \mathbb{C}\llbracket \lambda^{\pm 1}, \mu^{\pm 1}\rrbracket\end{aligned}$$

となる．したがって $\langle\lambda| := |\lambda\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\rrbracket$ をブラベクトルと見做すことができる．
そこで一般の母関数 $|a(z)\rangle \in \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ に対して波動関数 $\psi(\lambda) = \langle\lambda|a(z)\rangle$ を定義し，$|a(z)\rangle = \int \psi(\lambda)|\lambda\rangle \mathrm{d}\lambda$ のように書けることを確認する．

Theorem 2.2.2

V をベクトル空間とする．
母関数 $a(z) \in V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ に対して，その波動関数を

$$\psi(\lambda) := \mathrm{Res}_z \left(\langle\lambda|a(z)\right) \in V\llbracket \lambda^{\pm 1}\rrbracket$$

で定義する．このとき

$$\psi(\lambda) = \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m,$$
$$a(z) = \mathrm{Res}_\lambda (\psi(\lambda)|\lambda\rangle)$$

が成り立つ．

Proof. 直接計算して示す．

$a(z) = \sum_n a_n z^n$ のとき，波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \mathrm{Res}_z \left(\sum_m \lambda^m z^m\right)\left(\sum_n a_n z^n\right) \\ &= \sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\end{aligned}$$

となり，それと $|\lambda\rangle$ との内積を取ると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\lambda (\psi(\lambda)|\lambda\rangle) &= \mathrm{Res}_\lambda \left(\sum_{m+n=-1} a_n \lambda^m\right)\left(\sum_\ell \lambda^\ell z^\ell\right) \\ &= \sum_{m+\ell=-1} a_{-m-1} z^\ell \\ &= a(z)\end{aligned}$$

が従う． □

続いてスペクトル分解を用いて，λ に関する無限小平行移動 $T(\mathrm{d}\lambda)$ を求めよう．

LEMMA 2.2.1

A を代数，V を A 加群とする．与えられた母関数 $g(\lambda) = \sum_{m,n} g_{m,n} \lambda^m z^n \in V[\lambda^{\pm 1}]\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ について，A 準同型 $\hat{g} : A\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \to V\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ が

$$\hat{g}(a(z)) := \mathrm{Res}_\lambda\, g(\lambda)\, \mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

で定義できる．さらに，$a(z) = \sum_n a_n z^n$ としたとき

$$\hat{g}\left(\sum_n a_n z^n\right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n}\right) z^n$$

と書ける．

Proof. $g(\lambda)$ が $V[\lambda^{\pm 1}]\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ の元であるから，各 n について $g_{m,n}$ は有限個を除いて 0 である．よって，$\sum_m a_m g_{m,n} (\in V)$ のような和が定義できる．そこで $(\mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)) g(\lambda)$ を計算すると，**THEOREM 2.2.7** より

$\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) = \sum_\ell a_{-\ell-1}\lambda^\ell$ だから

$$\begin{aligned} g(\lambda)\,\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) &= \left(\sum_{m,n} g_{m,n}\lambda^m z^n\right)\left(\sum_\ell a_{-\ell-1}\lambda^\ell\right) \\ &= \sum_d \left(\sum_{m,n} a_{m-d-1}g_{m,n}z^n\right)\lambda^d \end{aligned}$$

となる．したがって $\hat{g}a(z)$ は well-defined であり，

$$\hat{g}\left(\sum_n a_n z^n\right) = \sum_n \left(\sum_m a_m g_{m,n}\right) z^n$$

が成り立つ． □

Lemma 2.2.2

逆に，A 準同型 $f : A[\![z^{\pm1}]\!] \to V[\![z^{\pm1}]\!]$ に対して，新しい A 準同型 $\hat{f} : A[\![z^{\pm1}, \lambda^{\pm1}]\!] \to V[\![z^{\pm1}, \lambda^{\pm1}]\!]$ を

$$\hat{f}\left(\sum_m a_m(z)\lambda^m\right) := \sum_m f(a_m(z))\lambda^m \quad \left(a_m(z) \in A[\![z^{\pm1}]\!]\right)$$

で定義する．さらに，

$$f(a(z)) = \sum_n f_n(a(z))\,z^n$$

と書いたとき，$f_n(\sum a_k z^k) = \sum_m a_m f_{m,n}$（$f_{m,n} \in V$，各 n に対して $(f_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ は有限個を除いて 0）の形をしていると仮定する．このとき $\hat{f}(A[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]) \subset V[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ であり，

$$f(a(z)) = \mathrm{Res}_\lambda\,\hat{f}(|\lambda\rangle)\,\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)$$

が成り立つ．

Proof. $a(\lambda) = \sum_{m,n} a_{m,n}\lambda^m z^n \in A[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ に対して

$$\hat{f}a(\lambda) = \sum_m f\left(\sum_n a_{m,n}z^n\right)\lambda^m = \sum_m \left(\sum_{\ell,n} a_{m,\ell}f_{\ell,n}z^n\right)\lambda^m$$

となり，これは $f_{m,n}$ に関する仮定により $V[\lambda^{\pm1}][\![z^{\pm1}]\!]$ の元である．
　また，とくに $a_{m,n} = \delta_{m,n}$ と置くことで

$$\hat{f}|\lambda\rangle = \sum_m\sum_n f_{m,n}z^n\lambda^m$$

を得る．よって **Lemma 2.2.1** より

$$f(a(z)) = \mathrm{Res}_\lambda\,\hat{f}|\lambda\rangle\,\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z)$$

が従う． □

REMARK 2.2.1 **LEMMA 2.2.1** の写像 $\hat{g}$ に **LEMMA 2.2.2** を適用することで，線型写像

$$\hat{\hat{g}}: A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$$

が得られる．これは $\hat{\hat{g}}|\lambda\rangle = g(\lambda)$ を満たし，その意味で "$g(\lambda)$ を $A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ 全体へ拡大したもの" と見做すことができる．そのため，記号を濫用して $\hat{\hat{g}} = g$ と書く．

EXAMPLE 2.2.1 i）A を代数とするとき，シフト演算子 $p: A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ は $p_n(a(z)) = a_{n+1}$ であるから，$p_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ と書ける．$\hat{p}$ は

$$\hat{p}\left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m\right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

となる．たとえば

$$\hat{p}|\lambda\rangle = \sum_n z^n \lambda^{n+1} \quad (a_{m,n} = \delta_{m,n}),$$
$$\hat{p}\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda} = \sum_n (n+1) z^n \lambda^n \quad (a_{m,n} = n\delta_{m,n-1}).$$

PROPOSITION 2.2.3

A を代数，V を A 加群とする．**LEMMAS 2.2.1 AND 2.2.2** によって構成される写像

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{A,V}^{-1}: \mathrm{Hom}_A\left(A[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket, V[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\right) &\to \mathrm{Hom}_A\left(A\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket, V\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket\right)\\ g &\mapsto \hat{g}\end{aligned}$$

は次の性質を満たす：

i）$\mathcal{F}_{A,V}^{-1}$ は A 準同型である．すなわち，$\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[af+bg] = a\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[f] + b\mathcal{F}_{A,V}^{-1}[g]$ が成り立つ（$a, b \in A$）．

ii）A, B, C が代数で代数準同型 $A \to B \to C$ を持つとき（B が A 加群で C が B 加群であるとき），$\mathcal{F}_{B,C}^{-1}[f] \circ \mathcal{F}_{A,B}^{-1}[g] = \mathcal{F}_{A,C}^{-1}[f \circ g]$ が成り立つ．

Proof. 定義通り計算すれば従う． □

この命題により，$[\hat{f}, \hat{g}] = \mathcal{F}_{A,A}^{-1}[[f,g]]$ が分かる．つまり $[f,g]$ が既知のときに，それを用いて $[\hat{f}, \hat{g}]$ も計算することができる．

いよいよ平行移動の生成子 q を定義していく．

DEFINITION 2.2.2

スペクトルの平行移動演算子 $T(\mathrm{d}\lambda): \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}\lambda)\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を，次のように定義する．まず $(\lambda + \mathrm{d}\lambda)^n \in \mathbb{C}\llbracket\lambda, \mathrm{d}\lambda\rrbracket$ を，$n \geqslant 0$ のときは二項定理で，$n < 0$ のときは **EXAMPLE 1.3.1** で展開したもの

として，

$$g(\lambda, \mathrm{d}\lambda) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda + \mathrm{d}\lambda)^n z^n \in \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right]$$

を考える．このままだと **Lemma 2.2.1** を適用できないため，$O(\mathrm{d}\lambda^2)$ を無視して

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle := |\lambda + \mathrm{d}\lambda\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda^n + n\lambda^{n-1}\mathrm{d}\lambda) z^n \in (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)[\lambda^{\pm 1}]\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$$

とする．正確には，商写像

$$\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right] \twoheadrightarrow \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right] / \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\right]\!\right] \mathrm{d}\lambda^2 \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}, \lambda^{\pm 1}\right]\!\right]$$

による $g(\lambda, \mathrm{d}\lambda)$ の像を考えている．こうして，線型演算子 $T(\mathrm{d}\lambda) : \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \to (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ が

$$T(\mathrm{d}\lambda) a(z) := \mathrm{Res}_\lambda |\lambda + \mathrm{d}\lambda\rangle \mathrm{Res}_z \langle \lambda | a(z)$$

で定まる．

Remark 2.2.2 $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}\,\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ と置く．ベクトル空間としての $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]$ には

$$[a\,\mathrm{d}\lambda^m, b\,\mathrm{d}\lambda^n] := [a, b]\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad (a, b \in \mathfrak{g})$$

によって自然に Lie 代数の構造が入る（**Corollary 1.3.4**）．これを Lie 代数のイデアル $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]\,\mathrm{d}\lambda^2$ で割ると，Lie 代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ を得る．

Lie 代数 $\mathfrak{g}[\![\mathrm{d}\lambda]\!]$ は $\mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right]$ 上に自然に作用する（**Corollary 1.3.5**）：

$$(a\,\mathrm{d}\lambda^m) \cdot b\,\mathrm{d}\lambda^n := (a \cdot b)\,\mathrm{d}\lambda^{m+n} \quad \left(a \in \mathfrak{g}, b \in \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]\right).$$

ここから，$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}\,\mathrm{d}\lambda$ の $(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \cong \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right] / \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}, \mathrm{d}\lambda\right]\!\right] \mathrm{d}\lambda^2$ への作用が誘導される（**Proposition 1.2.2**）．

Remark 2.2.3 **Lemma 2.2.1** の記号に合わせると，$g_{m,n} = \delta_{m,n} + n\delta_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda$ である．それによって

$$T(\mathrm{d}\lambda) \sum_n a_n z^n = \sum_{m,n} a_m g_{m,n} z^n = \sum_n (a_n + n a_{n-1}\,\mathrm{d}\lambda) z^n$$

と計算できる．

逆に，$f_{m,n} = g_{m,n}$ として **Lemma 2.2.2** を用いれば，

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda) \sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m = \sum_{\ell,m,n} a_{m,\ell}(\delta_{\ell,n} + n\delta_{\ell,n-1}\,\mathrm{d}\lambda) z^n \lambda^m = \sum_{m,n} (a_{m,n} + n a_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda) z^n \lambda^m$$

を得る．たとえば $a_{m,n} = \delta_{m,n+1}$ とすると，

$$\hat{g}\lambda|\lambda\rangle = \sum_n (\delta_{m,n+1} + n\delta_{m,n}\,\mathrm{d}\lambda) z^n \lambda^m = \lambda|\lambda\rangle + \lambda \frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \quad (= \lambda|\lambda + \mathrm{d}\lambda\rangle).$$

DEFINITION 2.2.3

母関数 $\hat{q}|\lambda\rangle \in \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}]\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を

$$\hat{q}|\lambda\rangle := \sum_n n\lambda^{n-1} z^n$$

として，**LEMMA 2.2.1** によって線型演算子 $q : \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket \to \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ を定義する：

$$qa(z) := \mathrm{Res}_\lambda\, \hat{q}|\lambda\rangle \mathrm{Res}_z \langle\lambda|a(z).$$

q 演算子の具体形は，上で計算したように $q\sum_n a_n z^n = \sum_n n a_{n-1} z^n$ で与えられる．
次の命題は直ちに従う：

PROPOSITION 2.2.4

$V = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と置き，$\mathfrak{gl}\,V$ の元として $T(\mathrm{d}\lambda) = 1 + q\,\mathrm{d}\lambda$ が成り立つ．

Proof. $\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle = |\lambda\rangle + \mathrm{d}\lambda \cdot \hat{q}|\lambda\rangle$ と **PROPOSITION 2.2.3** を使う． □

さて，最後に交換子 $[p, q]$ を計算しよう．

PROPOSITION 2.2.5

$V = \mathbb{C}\llbracket z^{\pm 1}\rrbracket$ と置く．
シフト演算子 p は，V 上の演算子とも $V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ 上の演算子とも見做すことができる．すると，V から $V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ への線型写像として

$$pT(\mathrm{d}\lambda) - T(\mathrm{d}\lambda)p = \mathrm{d}\lambda.$$

ただし，$\mathrm{d}\lambda$ は $V \ni a(z) \mapsto a(z)\,\mathrm{d}\lambda \in V \oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ で定義される．

Proof. $\hat{p}\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)$ について，

$$\hat{p}\left(\sum_{m,n} a_{m,n} z^n \lambda^m\right) = \sum_{m,n} a_{m,n+1} z^n \lambda^m$$

であったから（**EXAMPLE 2.2.1**），$a_{m,n} = \delta_{m,n} + n\delta_{m,n-1}\,\mathrm{d}\lambda$ とすれば

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)|\lambda\rangle = \hat{p}|\lambda + \mathrm{d}\lambda\rangle &= \sum_{m,n} (\delta_{m,n+1} + (n+1)\delta_{m,n}\,\mathrm{d}\lambda) z^n \lambda^m \\ &= \lambda|\lambda\rangle + \left(|\lambda\rangle + \lambda \frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

一方 **Remark 2.2.3** で確認したように

$$\hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\hat{p}|\lambda\rangle = \hat{T}(\mathrm{d}\lambda)\lambda|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle + \lambda\frac{\partial|\lambda\rangle}{\partial\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

となるから，結局 **Proposition 2.2.3** より

$$(pT(\mathrm{d}\lambda) - T(\mathrm{d}\lambda)p)\,a(z) = \mathrm{Res}_\lambda\,\mathrm{d}\lambda|\lambda\rangle\mathrm{Res}_z\langle\lambda|a(z) = a(z)\,\mathrm{d}\lambda.$$

□

Proposition 2.2.6

$\mathfrak{gl}\,\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!]$ の元として，$[p,q]=1$.

Proof. $V=\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!]$ と置く．

Proposition 2.2.5 で $V\to V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda$ の写像として

$$[p, T(\mathrm{d}\lambda)] = \mathrm{d}\lambda$$

を証明したから，とくに $\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として

$$[p, 1+q\,\mathrm{d}\lambda] = \mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ．よって一般に，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元 $f+g\,\mathrm{d}\lambda$ が $\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $f+g\,\mathrm{d}\lambda=0$ ならば，$(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\,\mathrm{d}\lambda)\otimes\mathfrak{gl}\,V$ の元としても $f+g\,\mathrm{d}\lambda=0$ となることを示せば十分である．$\mathfrak{gl}(V\oplus V\,\mathrm{d}\lambda)$ の元として $=0$ のとき，任意のベクトル $v,w\in V$ に対して

$$(f+g\,\mathrm{d}\lambda)(v+w\,\mathrm{d}\lambda) = f(v) + (f(w)+g(v))\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

が成り立つ．つまり任意の $v\in V$ に対して $f(v)=0$ であるから，$f=0\in\mathfrak{gl}\,V$．すると $g(v)=0$ も従い，やはり $g=0\in\mathfrak{gl}\,V$ が言える． □

以上の命題を再度述べ直すと，次の定理を得る．

Theorem 2.2.7

$\mathbb{C}[\![z^{\pm1}]\!]$ 上の線型演算子 q を

$$qa(z) \coloneqq z\frac{\partial}{\partial z}(za(z)) = \sum_n na_{n-1}z^n$$

で定義すると，交換子が $[p,q]=1$ を満たす．

なお，今までの議論を経由せず天下り式に示すこともできる：

Proof. $pa(z) = z^{-1}a(z)$ であったから，

$$pq = z^{-1} \cdot z\frac{\partial}{\partial z}z = \frac{\partial}{\partial z}z = 1 + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$qp = z\frac{\partial}{\partial z}z \cdot z^{-1} = z\frac{\partial}{\partial z}.$$

□

§ 2.3 一般固有空間と Heisenberg 代数

ここでは，p 演算子の一般的な性質について調べるために，Heisenberg 代数を導入する．

DEFINITION 2.3.1

3 個のベクトル $p, q, 1$ を生成系とする自由ベクトル空間

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q \oplus \mathbb{C}1$$

に交換関係

$$[p, q] = 1, \quad [1, H] = 0$$

を定義すると，$\mathfrak{h}$ は Lie 代数となる．これを **Heisenberg 代数**（*Heisenberg algebra*）と呼ぶ.

DEFINITION 2.3.2

$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\,V$ を表現とする．ベクトル $v \in V$ が，ある複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ を用いて $\rho(1)v = \lambda v$ を満たすとき，v を**ウェイトベクトル**（*weight vector*）と言い，λ を v の**ウェイト**（*weight*）と呼ぶ.
ウェイトベクトル v であって，さらに $v \neq 0$ かつ $\rho(p)v = 0$ を満たすとき，v を**最高ウェイトベクトル**（*highest weight vector*）と呼ぶ.

EXAMPLE 2.3.1 i）$\mathbb{C}$ 値母関数のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!]$ に対して，

$$\rho(p) = z^{-1}, \quad \rho(q) = z\frac{\partial}{\partial z}z, \quad \rho(1) = \mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\![z^{\pm 1}]\!])$ が定まる．このとき任意の母関数はウェイト 1 のウェイトベクトルである．最高ウェイトベクトルは存在しない.

ii）0 でない複素数 $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ を固定して

$$\rho_\lambda(p) = z^{-1} - \lambda, \quad \rho_\lambda(q) = \rho(q), \quad \rho_\lambda(1) = \rho(1)$$

と定義すると，ρ_λ もまた $\mathfrak{h}$ 加群を定める．この場合も任意の母関数がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$|\lambda\rangle$ は最高ウェイトベクトルである.

iii）一変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ に対して，

$$\rho(p) = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho(q) = z, \quad \rho(1) = \mathrm{id}$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[z])$ が定まる．同様に任意の多項式がウェイト 1 のウェイトベクトルとなり，$1 \in \mathbb{C}[z]$ が最高ウェイトベクトルである．

iv）より一般に，あるベクトル空間 V の線型作用素 $P, Q, I \in \operatorname{End} V$ であって $[P,Q] = I, [I,P] = 0 = [I,Q]$ を満たすものがあれば,

$$\rho(p) = P, \quad \rho(q) = Q, \quad \rho(1) = I$$

によって $\mathfrak{h}$ 加群 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\, V$ が定まる．

以下では数列の正規形漸化式の解空間が，$\mathfrak{h}$ 表現 $\mathbb{C}[z]$ を用いて書けることを示す．最初に便利な公式を証明しておこう．

Lemma 2.3.1

$\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\, V$ を $\mathfrak{h}$ の表現とする，$v \in V$ が複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ をウェイトとする最高ウェイトベクトルのとき，

$$\rho(1)\rho(q)^n v = \lambda \rho(q)^n v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}),$$
$$\rho(p)\rho(q)^n v = n\lambda \rho(q)^{n-1} v \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1})$$

が成り立つ．

Proof. 上の等式は，$\rho(1)v = \lambda v$ と $[\rho(1), \rho(q)] = \rho([1,q]) = 0$ から従う．

下の等式を n に関する帰納法で示す．

v が最高ウェイトベクトルであるから，

$$\rho(p)\rho(q)v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))v = \lambda v$$

となり，$n = 1$ の場合が確かめられる．

n の場合を仮定すると，$n+1$ について

$$\rho(p)\rho(q)^{n+1} v = (\rho(q)\rho(p) + \rho(1))\rho(q)^n v = \rho(q) \cdot n\lambda \rho(q)^{n-1} v + \lambda \rho(q)^n v = (n+1)\lambda \rho(q)^n v$$

となるから，任意の $n \geqslant 1$ で成り立つことが示された． □

Theorem 2.3.1

V を $\mathfrak{h}$ の表現とする．$v \in V$ が最高ウェイトベクトルのとき，V の部分空間

$$V' := \operatorname{span}\{q^n v \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

は V の部分表現であり，さらに v のウェイトが 0 でないときは既約となる．

この表現を $U(\mathfrak{h})v = V'$ と書く．$U(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ の universal enveloping algebra のつもりであるが，ここ

> ではそれを定義せずに単なる記号として扱っている．

Proof. まず **Lemma 2.3.1** より，V' が部分表現となることは分かる．
　既約性を示すために，次の性質に注意する：

$$p^n q^n v \in \mathbb{C}v \setminus 0, \quad p^{n+1} q^n v = 0.$$

これらは **Lemma 2.3.1** を繰り返し適用すると，$p^n q^n v = n!\lambda v$ となることから従う．ただし v のウェイトを λ と置いた．$0 \neq U \subset V'$ を任意の部分表現として，ベクトル $0 \neq u \in U$ を適当に取る．すると $u = \sum_{n=0}^{N} a_n q^n v$（$a_n \in \mathbb{C}$，$a_N \neq 0$）と書け，

$$p^N u = a_N p^N q^N v \in \mathbb{C}v \setminus 0$$

を満たす．また，U は部分表現であるから $p^N u \in U$ および $q^m p^N u \in U$（$m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$）となる．よって V' の任意のベクトルが U の元となるから，$U = V'$．したがって V' は既約表現である．□

Corollary 2.3.2

> **Example 2.3.1** の表現 $\mathbb{C}[z]$ は既約.

Proof. $v = 1$ として **Theorem 2.3.1** を適用すれば良い．□

Corollary 2.3.3

> V を $\mathfrak{h}$ の表現として，$v \in V$ がウェイト 1 の最高ウェイトベクトルであるとする．このとき，部分表現 $U(\mathfrak{h})v$ は $\mathbb{C}[z]$ と同型となる．つまり，全単射な $\mathfrak{h}$ 準同型 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ が存在する．さらに，この準同型は $f(z^n) = q^n v$ を満たすように取ることができる．
> とくに，集合 $\{q^n v \mid n \geqslant 0\}$ は線型独立である．

Proof. 線型写像 $f : \mathbb{C}[z] \to U(\mathfrak{h})v$ を $f(z^n) = q^n v$ で定義すると，これは全射な $\mathfrak{h}$ 準同型となる．よって **Corollary 2.3.2** および Schur の補題から主張が従う．□

Corollary 2.3.4

> **Corollary 2.3.3** と同じ状況の下で，表現 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\, U(\mathfrak{h})v$ について以下の性質が成り立つ：
>
> ⅰ）$\rho(p)^{n+1} \rho(q)^n v = 0$；
> ⅱ）$U(\mathfrak{h})_{\leqslant n} v := \mathrm{span}\{\rho(q)^i v \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \subset U(\mathfrak{h})v$ と置くとき，任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して
>
> $$U(\mathfrak{h})_{\leqslant n} v = \begin{cases} \rho(p) U(\mathfrak{h})_{\leqslant n+1} v & (\lambda = 0), \\ (\rho(p) - \lambda) U(\mathfrak{h})_{\leqslant n} v & (\lambda \neq 0); \end{cases}$$

iii）任意の非零ベクトル $0 \neq w \in U(\mathfrak{h})v$ と 0 でない複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$(\rho(p) - \lambda_1) \cdots (\rho(p) - \lambda_k) w \neq 0.$$

Proof. 標準的な表現 $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}\, \mathbb{C}[z]$（**Example 2.3.1**）の場合はすべて簡単な計算で確かめられる（(iii) は w の次数を見れば，左辺の leading term が 0 にはならない）．したがって，**Corollary 2.3.3** より一般の $U(\mathfrak{h})v$ に対しても成立する． □

§ 2.4 正規形漸化式の解空間

ここまでで準備は終わり，いよいよ漸化式の解空間の記述が始まる．まずは正規形漸化式を定義しよう．

Definition 2.4.1

正規形（*normal*）の漸化式とは，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ に関する

$$a_{n+d} = c_{d-1} a_{n+d-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \quad (c_i \in \mathbb{C},\ c_0 \neq 0)$$

という形の漸化式のことである．

正規形漸化式は，$p = z^{-1} \in \mathrm{End}\, \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right]$ を用いて

$$p^d a(z) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i p^i a(z)$$

と母関数表示することができる．さらに**特性多項式**（*characteristic polynomial*）$\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ を $\chi(t) := t^d - c_{d-1} t^{d-1} - \cdots - c_0$ で定義すると，

$$\chi(p) a(z) = 0$$

と書ける．この解空間を $S_\chi := \{a(z) \in \mathbb{C}\left[\!\left[z^{\pm 1}\right]\!\right] \mid \chi(p)a(z) = 0\}$ と置き，S_χ の基底を求めることが目標である．

S_χ はベクトル空間であり，その次元を計算することで簡単に同定できるが，ここではあえてそれを避けて，Heisenberg 代数の作用によって解空間を記述しよう．

最初に $(p-\lambda)^N a(z) = 0$ という形の解空間から導出する．

Proposition 2.4.1

$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ を 0 でない複素数として，$\chi(t) = (t-\lambda)^N$ を考える．このとき，

$$S_\chi = U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-1} |\lambda\rangle = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathbb{C} q^n |\lambda\rangle$$

が成り立つ．

Proof. **Corollary 2.3.3** および **Corollary 2.3.4** の i) より，集合

$$B_\lambda^N := \{q^n|\lambda\rangle \mid 0 \leqslant n < N\}$$

は線型独立であり，かつ $(p-\lambda)^{n+1}q^n|\lambda\rangle = 0$ を満たす．とくに $\chi(p)B_\lambda^N = 0$ であるから，$U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-1}|\lambda\rangle \subset S_\chi$ が分かる．

逆の包含関係を $N = \deg\chi$ に関する帰納法で示す．$N = 1$ のときは明らか．

$N \geqslant 2$ のとき，$a(z) \in S_\chi$ を仮定する．定義より $(p-\lambda)^{N-1}a(z) \in \mathrm{Ker}(p-\lambda)$ となるが，$N = 1$ の場合から $\mathrm{Ker}(p-\lambda) = U(\mathfrak{h})_{\leqslant 0}|\lambda\rangle$ であり，さらに **Corollary 2.3.4** の ii) を繰り返し用いれば $U(\mathfrak{h})_{\leqslant 0}|\lambda\rangle = \rho_\lambda(p)^{N-1}U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-1}|\lambda\rangle$ となる．よってある母関数 $a_1(z) \in U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-1}|\lambda\rangle$ を使って $(p-\lambda)^{N-1}a(z) = (p-\lambda)^{N-1}a_1(z)$ と書け，

$$a(z) \in a_1(z) + \mathrm{Ker}(p-\lambda)^{N-1} = a_1(z) + U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-2}|\lambda\rangle \subset U(\mathfrak{h})_{\leqslant N-1}|\lambda\rangle$$

が導かれた． □

以上の命題を使って一般の解空間 S_χ も計算される．

Theorem 2.4.2

一般の特性多項式 χ に対して，

$$S_\chi = \bigoplus_{i=1}^{k} S_{\chi_i} = \bigoplus_{i=1}^{k}\bigoplus_{n=0}^{M_i-1} \mathbb{C}q^n|\lambda_i\rangle.$$

ただし，$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ は χ の相異なる根であり，λ_i の重複度を M_i，$\chi_i(t) := (t-\lambda_i)^{M_i}$ と置いた．

Proof. 特性多項式の定数項が $\chi(0) = -c_0 \neq 0$ であったから，$\lambda_i \neq 0$ となることに注意する．

まず各 i,j に対して $[p-\lambda_i, p-\lambda_j] = 0$ という交換関係が成り立つから，$\chi_i(p)a(z) = 0$ ならば $\chi(p)a(z) = 0$ が言える．すなわち $S_{\chi_i} \subset S_\chi$．

続いて **Corollary 2.3.4** の ii) より

$$U(\mathfrak{h})_{\leqslant M_1-1}|\lambda_1\rangle = \left(\rho_{\lambda_1}(p) - (\lambda_2-\lambda_1)\right)^{M_2}\cdots\left(\rho_{\lambda_1}(p) - (\lambda_k-\lambda_1)\right)^{M_k} U(\mathfrak{h})_{\leqslant M_1-1}|\lambda_1\rangle$$

と変形できる．そこで $a(z) \in S_\chi$ を任意に取れば，$(p-\lambda_2)^{M_2}\cdots(p-\lambda_k)^{M_k}a(z) \in S_{\chi_1} = U(\mathfrak{h})_{\leqslant M_1-1}|\lambda_1\rangle$（**Proposition 2.4.1**）だから，ある母関数 $a_1(z) \in U(\mathfrak{h})_{\leqslant M_1-1}|\lambda_1\rangle$ を用いて

$$(p-\lambda_2)^{M_2}\cdots(p-\lambda_k)^{M_k}a(z) = (p-\lambda_2)^{M_2}\cdots(p-\lambda_k)^{M_k}a_1(z)$$

と書ける．すると $a(z) - a_1(z) \in S_{\chi_2\cdots\chi_k}$ となるから，k に関する帰納法によって $a(z) \in \sum_i S_{\chi_i}$．以上で

$$S_\chi = \sum_{i=1}^{k} S_{\chi_i}$$

を証明できた．

最後に $\sum S_{\chi_i} = \bigoplus S_{\chi_i}$ を示す．$a(z) \in \sum S_{\chi_i}$ を $a(z) = \sum a_i(z)$（$a_i(z) \in S_{\chi_i}$）という形で書いて，$a(z) = 0$ を仮定する．等式 $0(= a(z)) = \sum a_i(z)$ の両辺に $\chi_2(p) \cdots \chi_k(p)$ を作用させると，

$$0 = \chi_2(p) \cdots \chi_k(p) \sum a_i(z) = \chi_2(p) \cdots \chi_k(p) a_1(z)$$

を得る．さらに $a_1(z) \in S_{\chi_1} \subset U(\mathfrak{h})|\lambda_1\rangle$（**Proposition 2.4.1**）に **Corollary 2.3.4** の iii) を適用すると，$a_1(z) = 0$ でなければならない．他の i でも同様に $a_i(z) = 0$ となるから，$\sum S_{\chi_i} = \bigoplus S_{\chi_i}$ が示された． □