Hopf 代数

Masato Nakata

Faculty of Science, Kyoto University

Contents

Preface

本稿は，量子群を学ぶうえで必要な Hopf 代数の基礎を扱う．議論の大筋は [1] を参考にしたが，[1] は Sweedler 記法を多用するため，本質が分かりにくい．そのため我々は可能な限り Sweedler 記法の利用を制限し，代数・加群と余代数・余加群の双対性がはっきりと見えるように心がけた．

本稿では Hopf 代数の基礎の基礎しか触れない．より詳しく学びたい読者は，[2] や [3]，[1] 等に取り組むと良いだろう．

Hopf 代数とは，我々の理解が間違っていなければ，テンソル表現と反傾表現が定義できるような代数のことである．有限群や Lie 代数の表現論を学んだ読者は，そのコースの中でテンソル表現と反傾表現を構成したことを覚えているだろう．たとえば，群のテンソル表現への作用は $v \otimes w \mapsto (gv) \otimes (gw)$，反傾表現への作用は $f \mapsto (v \mapsto f(g^{-1}v))$ のように与えられる．同様に，Lie 代数のテンソル表現は $v \otimes w \mapsto (xv) \otimes w + v \otimes (xw)$，反傾表現は $f \mapsto (v \mapsto f(-xv))$ であった．一方で，群環の余積は $g \mapsto g \otimes g$，対合は $g \mapsto g^{-1}$ であり，普遍包絡環の余積は $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$，対合は $x \mapsto -x$ である．これらの余積や対合が，テンソル表現や反傾表現においてどのように用いられているのかはもはや明らかであろう．

このように，Hopf 代数の余積や対合は，テンソル表現や反傾表現を定義するのに使われる．その際に余単位律も必要になるが，あまり目立った効果は もたらさない．

さて，Hopf 代数の応用として最も知られているものは Yang-Baxter 方程式である．詳しい解説は [3] や [1] に譲るとして，大雑把に言えば有限次元 Yang-Baxter 方程式の解はすべて余加群から得られるという著しい定理がある．これは Faddeev，Reshetikhin，Takhatadjian 等によって示され，FRT 構成と呼ばれる．

FRT 構成は [1] にも書かれているが，前述したように，この本はやや冗長で分かりにくい点がある．本稿はその欠点を克服し，FRT 構成を理解するための一助となるべく書かれた．その目的が達成されることを願うばかりである．

第 1 章 Hopf 代数

§ 1.1 余代数

代数の定義を思い出すと，ベクトル空間 A と線形写像 $\mu : A\otimes A \to A$，$\eta : \Bbbk \to A$ の三つ組であって，可換図式

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & A \arrow[d, "\mu"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\otimes A \arrow[r, "\eta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, no head] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] & A\otimes\Bbbk \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\eta"'] \arrow[dl, no head] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

をそれぞれ満たすものであった．余代数はこれらの矢印の向きを反転させたものである．

Definition 1.1.1

$\Bbbk$ 上のベクトル空間 C と線形写像 $\Delta : C \to C\otimes C$，$\varepsilon : C \to \Bbbk$ の三つ組が可換図式

$$\begin{tikzcd}
C\otimes C\otimes C & C \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\
C\otimes C \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] & C\otimes\Bbbk \\
& C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] &
\end{tikzcd}$$

をそれぞれ満たすとき，三つ組 (C,Δ,ε) を**余代数**（*coalgebra*）と呼ぶ．誤解の恐れのないときは単に C を余代数と呼ぶこともある．

またこのとき, Δ を余代数 C の**余積**（*comultiplication*）, ε を**余単位**（*counit*）と言い, 等式 $(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta =$

$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$，$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta=\mathrm{id}=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta$ をそれぞれ**余結合律**（*coassociativity*），**余単位律**（*counit law*）と言う．
余積 Δ に対して線形写像 $\Delta^{\mathrm{op}}:C\to C\otimes C$ を $\Delta^{\mathrm{op}}:=\tau\circ\Delta$ で定義し，$\Delta=\Delta^{\mathrm{op}}$ が成り立つとき余代数 C は**余可換**（*cocommutative*）であると言われる．

代数の積 $\mu:A\otimes A\to A$ に対して，余代数の余積 $\Delta:C\to C\otimes C$ は少し分かりにくい．これを補うために，**Sweedler 記法**[*1]（*Sweedler notation*）がよく用いられる．

各 $x\in C$ に対し，$\Delta(x)$ は $C\otimes C$ の元であるから，有限個の $x_i',x_i''\in C$（$1\leqslant i\leqslant n$）が存在して

$$\Delta(x)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i'\otimes x_i''$$

と書ける．これを略記して

$$\Delta(x)=\sum_{(x)}x'\otimes x''$$

とする．余結合律より

$$\sum_{(x)}(x')'\otimes(x')''\otimes x''=\sum_{(x)}x'\otimes(x'')'\otimes(x'')''$$

が成り立つから，この等しい値を

$$\sum_{(x)}x'\otimes x''\otimes x'''$$

と略記する．以下同様に，

$$\sum_{(x)}x^{(1)}\otimes x^{(2)}\otimes\cdots\otimes x^{(n)}\in C^{\otimes n}$$

が定義される．

この Sweedler 記法によれば，余単位律は

$$\sum_{(x)}\varepsilon(x')x''=x=\varepsilon(x'')x'$$

と表される．

余代数の間の準同型は余積と余単位を保存する線形写像として定義される．

Definition 1.1.2

C，C' を余代数とする．線形写像 $f:C\to C'$ が**余代数準同型**（*coalgebra homomorphism*）であるとは，等式

[*1] Moss Sweedler による．

- $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$,
- $\varepsilon \circ f = \varepsilon$

を満たすことを言う．ただし，余代数 C 上の余積・余単位と C' 上の余積・余単位を同じ文字で表した．Sweedler 記法で書けば

$$\sum_{(f(x))} f(x)' \otimes f(x)'' = \sum_{(x)} f(x') \otimes f(x'')$$

となる．
準同型 $f : C \to C'$ が全単射のとき，f を**余代数同型**（*coalgebra isomorphism*）と言い，余代数同型が存在するとき余代数 C と C' は余代数として互いに**同型**（*isomorphic*）であると言う．

EXAMPLE 1.1.1　i）基礎体 $\Bbbk$ は $\Delta(1) = 1 \otimes 1$，$\varepsilon(1) = 1$ によって余代数となる．

ii）余代数 C の余単位 $\varepsilon : C \to \Bbbk$ は余代数準同型である．

iii）(C, Δ, ε) が余代数のとき，三つ組 $C^{\mathrm{cop}} = (C, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$ は余代数である．

iv）集合 X を基底とするベクトル空間 $\Bbbk X = \Bbbk^{\oplus X}$ について，余積 $\Delta : \Bbbk X \to \Bbbk X \otimes \Bbbk X$ と余単位 $\varepsilon : \Bbbk X \to \Bbbk$ を

$$\Delta(x) \coloneqq x \otimes x, \quad \varepsilon(x) \coloneqq 1 \quad (x \in X)$$

によって定めれば，$(\Bbbk X, \Delta, \varepsilon)$ は余代数となる．

v）集合 $X = \{x_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ を変数とする多項式環 $\Bbbk[X]$ について，余積 $\Delta : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X] \otimes \Bbbk[X]$ と余単位 $\varepsilon : \Bbbk[X] \to \Bbbk$ を

$$\Delta(x_{ij}) \coloneqq \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) \coloneqq \delta_{ij}$$

によって定めれば，$(\Bbbk[X], \Delta, \varepsilon)$ は余代数となる．

続く命題は代数と余代数の双対性についてである．

PROPOSITION 1.1.1

余代数の双対空間は自然に代数の構造を持つ．

Proof. (C, Δ, ε) が余代数のとき，双対空間 C^* 上に次のようにして代数の構造が定義される．
まず，積 $\mu : C^* \otimes C^* \to C^*$ を合成

$$C^* \otimes C^* \hookrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

によって定義する．ただし $\iota : C^* \otimes C^* \hookrightarrow (C \otimes C)^*$ は，各 $\alpha, \beta \in C^*$ について $\iota(\alpha \otimes \beta) : x \otimes y \mapsto \alpha(x) \otimes \beta(y)$ という線形写像である．
次に単位 $\eta : \Bbbk \to C^*$ を $\eta \coloneqq \varepsilon^*$ とする．

元を用いて明示的に書けば，

$$\begin{aligned}\mu(\alpha\otimes\beta) &= (\alpha\otimes\beta)\circ\Delta,\\ \eta(1) &= \varepsilon\end{aligned}$$

である．

積の結合律は

$$\begin{aligned}\mu(\mu(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma) &= (((\alpha\otimes\beta)\circ\Delta)\otimes\gamma)\circ\Delta\\ &= ((\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma)\circ(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta\end{aligned}$$

といった計算により確かめられる．余単位律も同様． □

PROPOSITION 1.1.2

有限次元代数の双対空間は自然に余代数の構造を持つ．

Proof. (A,μ,η) が有限次元代数のとき，双対空間 A^* 上に次のようにして余代数の構造が定義される．

まず余積 $\Delta : A^*\to A^*\otimes A^*$ を合成

$$A^*\xrightarrow{\mu^*}(A\otimes A)^*\cong A^*\otimes A^*$$

によって定義する[*2]．元を用いて書けば $\Delta(\alpha)=\alpha\circ\mu$.

次に余単位 $\varepsilon : A^*\to\Bbbk$ を $\varepsilon := \eta^*$ とする．

余積の余結合律と余単位律を確かめるには，

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(\alpha))=\alpha\circ\mu\circ(\mu\otimes\mathrm{id})$$

のように計算すればよい． □

EXAMPLE 1.1.2 i）X を集合とし，**EXAMPLE 1.1.1** で定義した余代数 $\Bbbk X$ を考える．

この双対代数 $A := (\Bbbk X)^*$ は函数環 $\mathrm{Func}(X,\Bbbk)$ に同型である．実際，線形同型 $f : A\to\mathrm{Func}(X,\Bbbk)$ を，各 $\alpha\in A$ に対して $f(\alpha) := \alpha|_X$ と定めれば，f は代数準同型となる．（$\Delta(x)=x\otimes x$ に注意．）

ii）行列環 $\mathrm{Mat}(n,\Bbbk)$ の双対余代数 $C := \mathrm{Mat}(n,\Bbbk)^*$ を考える．

ベクトル空間 $\Bbbk^n$ の標準基底 $\{e_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ とその双対基底 $\{e^i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ によって，$\mathrm{Mat}(n,\Bbbk)$ の標準基底 $\{e_i^j := e_ie^j \mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ とその双対基底 $\{f_j^i \mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$ を定める．

このとき，余代数 C の余積と余単位はそれぞれ

$$\Delta(f_j^i)=\sum_k f_k^i\otimes f_j^k,\quad \varepsilon(f_j^i)=\delta_j^i$$

[*2] A が有限次元でなければ線形写像 $(A\otimes A)^*\to A^*\otimes A^*$ が定義できないことに注意．

で与えられる．実際，余単位は $\varepsilon(f^i_j) = \sum_k f^i_j(e^k_k) = \delta^i_j$ であり，余積は

$$\begin{aligned}\Delta(f^i_j)(e^n_m \otimes e^p_q) &= f^i_j(e^n_m e^p_q) = f^i_j(\delta^n_q e^p_m) \\ &= \delta^n_q \delta^i_m \delta^p_j \\ \sum_k f^i_k \otimes f^k_j(e^n_m \otimes e^p_q) &= \sum_k \delta^i_m \delta^n_k \delta^k_q \delta^p_j \\ &= \delta^i_m \delta^n_q \delta^p_j\end{aligned}$$

と計算できる．

PROPOSITION 1.1.3

余代数のテンソル空間は自然に余代数の構造を持つ．

Proof. (C, Δ, ε)，$(C', \Delta', \varepsilon')$ を余代数とする．

テンソル空間 $C'' := C \otimes C'$ 上の余積 $\Delta'' : C'' \to C'' \otimes C''$ を $\Delta'' := (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta')$，余単位 $\varepsilon'' : C'' \to \Bbbk$ を $\varepsilon'' := \varepsilon \otimes \varepsilon'$ と定める．これらが余結合律と余単位律を満たすことは，容易に確かめられる． □

EXAMPLE 1.1.3 i）X，Y を集合とすると，次の余代数同型が存在する：

$$\Bbbk X \otimes \Bbbk Y \cong \Bbbk(X \times Y).$$

実際，$x \otimes y \mapsto (x, y)$（$x \in X$，$y \in Y$）によって定まる線形同型 $\Bbbk X \otimes \Bbbk Y \cong \Bbbk(X \times Y)$ は余積と余単位を保存する．

最後に商余代数を確認しよう．

DEFINITION 1.1.3

余代数 (C, Δ, ε) の部分空間 I が C の**両側余イデアル**（*two-sided coideal*），あるいは単に**余イデアル**（*coideal*）であるとは，余積について閉じていて，かつ余単位の核に含まれている

$$\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I, \quad \varepsilon(I) = 0$$

ことを言う．

このとき，商空間 C/I 上に余積と余単位が自然に誘導され，余結合律と余単位律を満たす．

$$\frac{C \otimes C}{I \otimes C + C \otimes I} = \frac{C}{I} \otimes \frac{C}{I}$$

に注意せよ．

この余代数 $(C/I, \Delta, \varepsilon)$ を C の I による**商余代数**（*quotient coalgebra*）と呼ぶ．

§ 1.2 双代数

Proposition 1.2.1

ベクトル空間 B が代数の構造 (B,μ,η) と余代数の構造 (B,Δ,ε) を持つとき，次は同値：

i）線形写像 $\mu: B\otimes B \to B$，$\eta: \Bbbk \to B$ はともに余代数準同型である；
ii）線形写像 $\Delta: B \to B\otimes B$，$\varepsilon: B \to \Bbbk$ はともに代数準同型である．

Proof. 両条件とも，次の四つの等式が成り立つことと同値である．

- $\Delta\circ\mu = (\mu\otimes\mu)\circ(\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})\circ(\Delta\otimes\Delta)$,
- $\varepsilon\circ\mu = \varepsilon\otimes\varepsilon$,
- $\Delta\circ\eta = \eta\otimes\eta$,
- $\varepsilon\circ\eta = \mathrm{id}$.

□

Definition 1.2.1

ベクトル空間 B が代数の構造 (B,μ,η) と余代数の構造 (B,Δ,ε) を持ち，**Proposition 1.2.1** の同値な条件を満たすとき，五つ組 $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ を**双代数**（*bialgebra*）と呼ぶ．
双代数の間の線形写像は，代数準同型であると同時に余代数準同型でもあるとき，**双代数準同型**（*bialgebra homomorphism*）と呼ばれる．

Example 1.2.1 i）B が双代数のとき，B^{op}，B^{cop}，$(B^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$ はいずれも双代数となる．
ii）B が有限次元双代数のとき，双対空間 B^* も双代数となる．
iii）G をモノイドとするとき，**Example 1.1.1** の余代数 $\Bbbk G$ は自然に代数の構造を持つ．（G のモノイドとしての積を $\Bbbk G$ 全体に拡張すればよい．）このとき各 $g,h\in G$ について

$$\begin{aligned}\Delta(gh) &= (gh)\otimes(gh) = (g\otimes g)(h\otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)\\ \varepsilon(gh) &= 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h)\end{aligned}$$

だから，$\Delta: \Bbbk G \to \Bbbk G\otimes\Bbbk G$，$\varepsilon: \Bbbk G\to\Bbbk$ はともに代数準同型である．
従って $\Bbbk G$ は双代数となる．
iv）G が有限モノイドのとき，双代数 $\Bbbk G$ の双対空間 $\mathrm{Func}(G,\Bbbk)$ もまた双代数となる．この函数環 $\mathrm{Func}(G,\Bbbk)$ における余積と余単位は

$$\Delta(f)(g,h) = f(gh),\quad \varepsilon(f) = f(1)\quad (g,h\in G)$$

によって与えられる．

v）G が有限群のとき，群環を $\Bbbk G$ ではなく函数環 $\mathrm{Func}(G, \Bbbk)$ として定義することもある．この環の積は

$$(ff')(g) \coloneqq \sum_{h \in G} f(h) f'(h^{-1}g) \quad (f, f' \in \mathrm{Func}(G, \Bbbk), g \in G)$$

である．余積を $\Delta(f)(g,h) \coloneqq \delta_{g,h} f(g)$（$f \in \mathrm{Func}(G, \Bbbk)$，$g,h \in G$），余単位を $\varepsilon(f) \coloneqq \sum_{g \in G} f(g)$（$f \in \mathrm{Func}(G, \Bbbk)$）で定義すれば，$\mathrm{Func}(G, \Bbbk)$ は $\Bbbk G$ に同型な双代数となる．これは上で定義した双対空間としての双代数の構造とは一般には異なる．

vi）**Example 1.1.1** の多項式環 $\Bbbk[x_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ 上の余積と余単位は，定義から代数準同型である．よって $\Bbbk[x_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ は双代数．

Definition 1.2.2

余代数 C の元 $x \in C$ が $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ を満たすとき，x を**原始元**（*primitive element*）と言う．原始元全体のなす部分空間を

$$\mathrm{Prim}(C) \coloneqq \{x \in C \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

と書く．

原始元の典型的な例はテンソル代数である．

Theorem 1.2.2

ベクトル空間 V のテンソル代数 $T(V)$ に対し，$\mathrm{Prim}(T(V)) = V$ となるような双代数の構造をただ一つ定めることができる．

Proof. テンソル代数の普遍性により，代数準同型 $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$，$\varepsilon : T(V) \to \Bbbk$ を

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \quad \varepsilon(v) = 0 \quad (v \in V)$$

によって定めることができる．

余結合律 $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ と余単位律 $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ において，各写像はすべて代数準同型だから，V 上で成り立つことを確認すれば良い．

$v \in V$ のとき，余結合律は

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(v)) &= v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 2v \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(v))\end{aligned}$$

から分かる．余単位律は明らか． □

Lemma 1.2.1

双代数 B の原始元 $x \in \mathrm{Prim}(B)$ について，$\varepsilon(x) = 0$ が成り立つ．

Proof. 余単位律から，

$$x = \varepsilon(x) \otimes 1 + 1 \otimes x$$

が成り立つ．よって $\varepsilon(x) = 0$． □

PROPOSITION 1.2.3

双代数 B の有限個の原始元 $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Prim}(B)$ を選び，それに対応してテンソル代数 $T(V)$ を考える．
ここで $V = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} \Bbbk v_i$ とおいた．
このとき，$v_i \mapsto x_i$（$1 \leqslant i \leqslant n$）で定まる代数準同型 $f : T(V) \to B$ は双代数準同型となる．

Proof. 線形写像 $f : T(V) \to B$ が余代数準同型であることを示す．
そのためには等式 $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$，$\varepsilon \circ f = \varepsilon$ を示せば良いが，各写像が代数準同型だから，V 上で成り立つことを確認すれば良い．
$v \in V$ のとき $v \in \mathrm{Prim}(T(V))$ かつ $f(v) \in \mathrm{Prim}(B)$ であることに注意する．
余単位については，**LEMMA 1.2.1** より，$\varepsilon(f(v)) = 0 = \varepsilon(v)$ となることから従う．
余結合律は

$$\begin{aligned}\Delta(f(v)) &= f(v) \otimes 1 + 1 \otimes f(v) = f(v) \otimes f(1) + f(1) \otimes f(v) \\ &= (f \otimes f)(\Delta(v))\end{aligned}$$

という計算から分かる． □

PROPOSITION 1.2.4

双代数 B の原始元全体 $\mathrm{Prim}(B)$ は，自然な交換子 $[x,y] = xy - yx$ によって Lie 代数となる．

Proof. ベクトル空間 $\mathrm{Prim}(B)$ が交換子で閉じていることを確認すれば良い．
任意の原始元 $x, y \in \mathrm{Prim}(B)$ を取ると，その交換子は

$$\begin{aligned}\Delta([x,y]) &= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\ &= [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y]\end{aligned}$$

を満たすから，$[x,y] \in \mathrm{Prim}(B)$．よって $\mathrm{Prim}(B)$ は Lie 代数である． □

§ 1.3 Hopf 代数

Hopf 代数を定義するために，線形写像の**畳み込み**（*convolution*）を定義しよう．
代数 A と余代数 C が与えられたとき，線形写像 $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ の畳み込み $f * g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ は，合成

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

として定義される．

PROPOSITION 1.3.1

A，C をそれぞれ代数，余代数とするとき，ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(C,A)$ は畳み込みを積として代数となる．単位は $\eta\circ\varepsilon\in\mathrm{Hom}(C,A)$ である．
またこのとき，テンソル代数 $A\otimes C^*$ は自然に $\mathrm{Hom}(C,A)$ の部分代数と見なすことができる．

Proof. 結合律と単位律はそれぞれ

$$\begin{aligned}(f*g)*h &= \mu\circ((\mu\circ(f\otimes g)\circ\Delta)\otimes h)\circ\Delta\\ &= \mu\circ(\mu\otimes\mathrm{id})\circ((f\otimes g)\otimes h)\circ(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta\\ &= \mu\circ(\mathrm{id}\otimes\mu)\circ(f\otimes(g\otimes h))\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta\\ &= f*(g*h),\\ (\eta\varepsilon)*f &= \mu\circ(\eta\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes f)\circ(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = f = f*(\eta\varepsilon)\end{aligned}$$

のようにして分かる．

テンソル代数 $A\otimes C^*$ 上の積は，$a,b\in A$，$\alpha,\beta\in C^*$ のとき，

$$(a\otimes\alpha)(b\otimes\beta): x\mapsto(\alpha\beta)(x)ab=(\alpha\otimes\beta)(\Delta(x))ab\quad(x\in C)$$

であるから，$\mathrm{Hom}(C,A)$ 上の積と一致する．単位も $\eta\otimes\varepsilon^*=\eta\circ\varepsilon$ となり，$\mathrm{Hom}(C,A)$ の単位と一致する． □

EXAMPLE 1.3.1 i）**PROPOSITION 1.3.1** で特に $A=\Bbbk$ と取ると，$\mathrm{Hom}(C,\Bbbk)$ 上の畳み込みによる代数構造は，**PROPOSITION 1.1.1** による代数構造に等しい．

DEFINITION 1.3.1

双代数 H が **Hopf 代数**（*Hopf algebra*）であるとは，恒等写像 $\mathrm{id}\in\mathrm{End}(H)$ の畳み込みに関する両側逆元 $S\in\mathrm{End}(H)$ が存在することを言う．
この逆元 S を Hopf 代数 H 上の**対合**（*antipode*）と呼ぶ．
Hopf 代数の間の双代数準同型は，対合と可換であるとき，**Hopf 代数準同型**（*Hopf algebra homomorphism*）と呼ばれる．

一般に，モノイドの元の逆元は存在すれば一意であるから，双代数 H 上の対合も存在すれば一意である．

EXAMPLE 1.3.2 i）有限次元 Hopf 代数 H の双対双代数 H^* を考える．
双代数 H^* 上の畳み込みは，$f,g\in\mathrm{End}(H)$ に対して $f^**g^*=(f*g)^*$ で与えられる．従って，$S\in\mathrm{End}(H)$ が Hopf 代数 H 上の対合であれば，$S^**\mathrm{id}=\mathrm{id}=\mathrm{id}*S^*$ となり，S^* が双代数 H^* 上の対合となる．

ii）H が Hopf 代数ならば，$(H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$ も同じ対合を持つ Hopf 代数である．

iii）G をモノイドとするとき，**EXAMPLE 1.2.1** の双代数 $\Bbbk G$ が対合を持つための必要十分条件は G が群となることである．実際，線形自己準同型 $S\in\mathrm{End}(H)$ について

$$\mu((S\otimes\mathrm{id})(\Delta(g)))=S(g)g\quad(g\in G)$$

といった計算より分かる．

iv）ベクトル空間 V のテンソル双代数 $T(V)$（**Theorem 1.2.2** を見よ）上の対合 $S \in \mathrm{End}(T(V))$ が，各 $v \in V$ に対して $S(v) = -v$ によって定まる．

v）ベクトル空間 V の対称代数 $S(V)$ は，テンソル代数 $T(V)$ のイデアル $I = ([v,w] \mid v,w \in V)$ による商代数である．このイデアル $I \subset T(V)$ は余イデアルでもある．実際，$\Delta([v,w]) = [v,w] \otimes 1 + 1 \otimes [v,w] \in I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$ であり，また $\varepsilon([v,w]) = 0$（$v,w \in V$）．
これにより $S(V)$ には双代数の構造が自然に誘導される．
さらに対合についても，$S(I) \subset I$ となるから，$S(V)$ 上に誘導される．具体的には，n 次の斉次元 $x \in S(V)$ に対して $S(x) = (-1)^n$ となる．

次の命題は，群 G の逆元を与える写像 $x \mapsto x^{-1}$ が反群準同型であることに対応する．

Proposition 1.3.2

Hopf 代数上の対合は，反代数準同型かつ反余代数準同型である．

Proof. 反代数準同型であること：
線形写像 $\nu, \rho \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ を

$$\nu := \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes S), \quad \rho := S \circ \mu$$

と定義する．このとき，ν，ρ がそれぞれ $\mu \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ の畳み込みに関する右逆元，左逆元であることを示せば良い．
$\mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ における畳み込みは，各 $f, g \in \mathrm{Hom}(H \otimes H, H)$ に対して

$$f * g = \mu \circ (f \otimes g) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

で与えられる．
まず $\nu = \mu \circ (S \otimes S) \circ \tau$ であるから，$\tau' := \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}$ とおけば，

$$\mu * \nu = \mu \circ \mu^{\otimes 2} \circ (\mathrm{id} \otimes S^{\otimes 2}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2}$$

と書ける．ただし，線形写像 f に対して $f^{\otimes 2} := f \otimes f$ と定義した．
線形写像 $(\mathrm{id} \otimes \tau) \circ \tau' \in \mathrm{End}(H \otimes H \otimes H \otimes H)$ は $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \mapsto x_1 \otimes x_3 \otimes x_4 \otimes x_2$ という置換であるから，Sweedler 記法を用いて

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \mu \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes S^{\otimes 2}) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2}(x \otimes y) &= \sum_{(x)} x' \otimes (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(y)) \otimes S(x'') \\ &= \varepsilon(y) \cdot (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x)\end{aligned}$$

となる．よって，積の結合律から $\mu \circ \mu^{\otimes 2} = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mu \otimes \mathrm{id})$ を利用して，

$$\begin{aligned}\mu * \nu(x \otimes y) &= \varepsilon(y) \cdot \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x) = \varepsilon(y) \cdot \varepsilon(x); \\ \mu * \nu &= \eta \circ \varepsilon^{\otimes 2}.\end{aligned}$$

次に $\rho * \mu$ について，積 $\mu : H \otimes H \to H$ が余代数準同型だから，$\mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2} = \Delta \circ \mu$ および $\varepsilon \circ \mu = \varepsilon^{\otimes 2}$ が成り立つ．今 $\rho * \mu = \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2}$ であるから，

$$\rho * \mu = \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \circ \mu = \eta \circ \varepsilon \circ \mu = \eta \circ \varepsilon^{\otimes 2}.$$

反余代数準同型であること：

線形写像 $\nu, \rho \in \mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ を

$$\nu := (S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{op}}, \quad \rho := \Delta \circ S$$

と定義する．このとき，ν，ρ がそれぞれ $\Delta \in \mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ の畳み込みに関する右逆元，左逆元であることを示せば良い．

$\mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ における畳み込みは，各 $f, g \in \mathrm{Hom}(H, H \otimes H)$ に対して

$$f * g = (\mu \otimes \mu) \circ \tau' \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

で与えられる．

まず $\Delta * \nu = \mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes S^{\otimes 2}) \circ \Delta^{\otimes 2} \circ \Delta$ となる．そこで

$$\begin{aligned} \mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \circ (\mathrm{id} \otimes S^{\otimes 2}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(x \otimes y \otimes z) &= (xS(z)) \otimes (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(y)) \\ &= \varepsilon(y) \cdot \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S)(x \otimes z) \\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S)((\varepsilon(y)x) \otimes z) \end{aligned}$$

と計算すれば，余積の余結合律 $\Delta^{\otimes 2} \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ から，

$$\begin{aligned} \Delta * \nu &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ (((\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta = \eta^{\otimes 2} \circ \varepsilon \end{aligned}$$

となる．

次に $\rho * \Delta$ について，余積 $\Delta : H \to H \otimes H$ が代数準同型だから，$\mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2} = \Delta \circ \mu$ および $\Delta \circ \eta = \eta^{\otimes 2}$ が成り立つ．今 $\rho * \Delta = \mu^{\otimes 2} \circ \tau' \circ \Delta^{\otimes 2} \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ であるから，

$$\rho * \Delta = \Delta \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \Delta \circ \eta \circ \varepsilon = \eta^{\otimes 2}.$$

□

この命題から，Hopf 代数 H の対合 S は Hopf 代数準同型 $S : H \to (H^{\mathrm{op}})^{\mathrm{cop}}$ となることが分かる．

THEOREM 1.3.3

Hopf 代数 H 上の対合 $S \in \mathrm{End}(H)$ が逆写像 $S^{-1} \in \mathrm{End}(H)$ を持つとき，S^{-1} は双代数 H^{op}，H^{cop} の対合となる．

特に，対合 S は Hopf 代数としての同型 $S : H^{\mathrm{op}} \to H^{\mathrm{cop}}$ を与える．

Proof. **PROPOSITION 1.3.2** より対合 S は反代数準同型かつ反余代数準同型であることに注意する．
S は反代数準同型だから S^{-1} もまた反代数準同型であり，

$$\begin{aligned}\mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= S^{-1} \circ \mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta \\ &= S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon = \eta \circ \varepsilon, \\ \mu^{\mathrm{op}} \circ (\mathrm{id} \otimes S^{-1}) \circ \Delta &= \mu^{\mathrm{op}} \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= S^{-1} \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= S^{-1} \circ \eta \circ \varepsilon = \eta \circ \varepsilon.\end{aligned}$$

よって S^{-1} は双代数 H^{op}，H^{cop} の対合である． □

THEOREM 1.3.4

Hopf 代数 H 上の対合 $S \in \mathrm{End}(H)$ について，次は同値：

i）$S^2 = \mathrm{id}$；
ii）S は双代数 H^{op}，H^{cop} の対合である．

特に，H が可換または余可換のとき $S^2 = \mathrm{id}$.

Proof. i) $\Longrightarrow$ ii) は **THEOREM 1.3.3** から従う．
ii) $\Longrightarrow$ i) を示す．
$S^2 \in \mathrm{End}(H)$ が $S \in \mathrm{End}(H)$ の畳み込みに関する左側逆元であることを示せば良い．
S は反代数準同型だから，

$$\begin{aligned}S^2 * S &= \mu \circ (S \otimes S) \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= S \circ \mu^{\mathrm{op}} \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \\ &= S \circ \eta \circ \varepsilon = \eta \circ \varepsilon.\end{aligned}$$

□

DEFINITION 1.3.2

双代数 B の元 $x \in B$ は，$\Delta(x) = x \otimes x$ を満たすとき**群的元**（*grouplike element*）と呼ばれる．
B の群的元全体のなすモノイドを $\mathrm{Grp}(B)$ と書く．

PROPOSITION 1.3.5

H を Hopf 代数とするとき，$\mathrm{Grp}(H)$ は対合 S を逆元射とする群となる．

Proof. まず対合 S は反余代数準同型だから各 $x \in \mathsf{Grp}(H)$ に対して $\Delta(S(x)) = S(x) \otimes S(x)$ であり，特に $S(x) \in \mathsf{Grp}(H)$.

今，余単位律より $\varepsilon(x) = 1$ が従う．よって対合の定義より，

$$S(x)x = 1 = xS(x) \quad (x \in \mathsf{Grp}(H)),$$

すなわち $S(x)$ が x の逆元であるから，$\mathsf{Grp}(H)$ は群となる． □

EXAMPLE 1.3.3 i）群 G について，$\mathsf{Grp}(\Bbbk G) = G$ が成り立つ．

第 2 章 Hopf 代数上の加群と余加群

§ 2.1 Hopf 代数上の加群

以下では左加群についてのみ扱うが，右加群でも同様のことが成り立つ．

まず加群のテンソル積について考える．

B を双代数とする．代数 B 上の左加群 M，N に対して，テンソル空間 $M\otimes N$ は自然に左 $B\otimes B$ 加群の構造を持つ．具体的には，テンソル空間の生成元 $m\otimes n\in M\otimes N$ に対する元 $b_1\otimes b_2\in B\otimes B$ の作用が $(b_1\otimes b_2)(m\otimes n)=(b_1m)\otimes(b_2n)$ によって定まる．

今，B は双代数だから代数準同型 $\Delta : B\to B\otimes B$ が存在する．この代数準同型によってテンソル空間 $M\otimes N$ は左 B 加群となる：

$$b(m\otimes n) := \Delta(b)(m\otimes n)\quad (b\in B, m\in M, n\in N).$$

また，ベクトル空間 M は代数準同型 $\varepsilon : B\to \Bbbk$ によって自明な左 B 加群の構造を得る：

$$b(m) := \varepsilon(b)m\quad (b\in B, m\in M).$$

Proposition 2.1.1

B を双代数，L，M，N を左 B 加群とする．また，ベクトル空間 $\Bbbk$ を自明な左 B 加群と見なす．このとき，次の自然な B 同型が成り立つ：

$$(L\otimes M)\otimes N\cong L\otimes(M\otimes N),\quad \Bbbk\otimes M\cong M\cong M\otimes\Bbbk.$$

さらに，双代数 B が余可換ならば $M\otimes N\cong N\otimes M$ という自然な B 同型も成り立つ．

Proof. 余結合律と余単位律からすぐに従う． □

次に Hom 空間について考える．

H を Hopf 代数とする．代数 H 上の左加群 M，N に対して，Hom 空間 $\mathrm{Hom}(M,N)$（ここで，Hom は $\Bbbk$ 上線形写像全体のなすベクトル空間を表す）上の代数 $H\otimes H^{\mathrm{op}}$ の作用は，

$$(x\otimes y)f := \rho(x)\circ f\circ\rho(y)\quad (x\in H, y\in H^{\mathrm{op}}, f\in\mathrm{Hom}(M,N))$$

によって自然に定まる．ただし，代数 A 上の左加群 M について，係数 $a \in A$ による作用 $m \mapsto am$ を $\rho(a) \in \mathrm{End}(M)$ と書いた．このとき写像 $\rho : A \to \mathrm{End}(M)$ は代数準同型となる．

今，H は Hopf 代数だから反代数準同型 $S : H \to H$ が存在し，代数準同型 $(\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta : H \to H \otimes H^{\mathrm{op}}$ を構成できる．この代数準同型によって Hom 空間 $\mathrm{Hom}(M, N)$ は左 H 加群となる．特に $N = \Bbbk$ を自明加群とすれば，双対空間 M^* が

$$xf = f \circ \rho(S(x)) \quad (x \in H, f \in M^*)$$

として左 H 加群となる．

Proposition 2.1.2

H を Hopf 代数，M，N を左 H 加群とする．このとき，自然な埋め込み

$$M^* \otimes N^* \to (N \otimes M)^*, \quad M \otimes N^* \to \mathrm{Hom}(N, M)$$

はともに H 準同型となる．
特に，K，L もまた左 H 加群で，条件

i）$\tau : K^* \otimes N \to N \otimes K^*$ は H 準同型である，
ii）「K または M」と「L または N」は有限次元である，

を満たすとき，自然な埋め込み

$$\mathrm{Hom}(K, M) \otimes \mathrm{Hom}(L, N) \to \mathrm{Hom}(L \otimes K, M \otimes N)$$

は H 準同型となる．

Proof.「特に」以下は，次の可換図式が存在することから従う：

$$\begin{tikzcd}
M \otimes K^* \otimes N \otimes L^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(K, M) \otimes \mathrm{Hom}(L, N) \arrow[dd] \\
M \otimes N \otimes K^* \otimes L^* \arrow[d] & \\
M \otimes N \otimes (L \otimes K)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L \otimes K, M \otimes N)
\end{tikzcd}$$

まず埋め込み $\lambda_1 : M^* \otimes N^* \to (N \otimes M)^*$ を確認する．

各 $x \in H$，$\alpha \in M^*$，$\beta \in N^*$ について

$$\lambda_1(x(\alpha \otimes \beta)) = \lambda_1(\alpha \otimes \beta) \circ \rho((S \otimes S) \circ \Delta^{\mathrm{op}}(x)),$$
$$x\lambda_1(\alpha \otimes \beta) = \lambda_1(\alpha \otimes \beta) \circ \rho(\Delta \circ S(x))$$

と計算できるから，等式 $\lambda_1(x(\alpha \otimes \beta)) = x\lambda_1(\alpha \otimes \beta)$ が成り立つ．よって線形写像 $\lambda_1 : M^* \otimes N^* \to (N \otimes M)^*$ は H 準同型である．

次にもう一方の埋め込み $\lambda_2 : M \otimes N^* \to \mathrm{Hom}(N, M)$ を確認する．

各 $x \in H$，$m \in M$，$n \in N$，$\alpha \in N^*$ について

$$\begin{aligned}
\lambda_2(x(m \otimes \alpha))(n) &= (\mathrm{id} \otimes \alpha)((\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x))(m \otimes n) \\
&= (x\lambda_2(m \otimes \alpha))(n)
\end{aligned}$$

と計算できるから，線形写像 $\lambda_2 : M \otimes N^* \to \mathrm{Hom}(N, M)$ は H 準同型である． □

PROPOSITION 2.1.3

H を Hopf 代数，M を左 H 加群とする．このとき，評価函数 $\mathrm{ev} : M^* \otimes M \to \Bbbk$ は H 準同型である．さらに，ベクトル空間 M が有限次元ならば，余評価函数 $\mathrm{coev} : \Bbbk \to M \otimes M^*$ と合成 $\circ : \mathrm{Hom}(M, N) \otimes \mathrm{Hom}(L, M) \to \mathrm{Hom}(L, N)$（$L$，$N$ は左 H 加群）も H 準同型である．

Proof. 評価函数について，各 $x \in H$，$m \in M$，$\alpha \in M^*$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}(x(\alpha \otimes m)) &= \alpha((\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x))m) \\ &= \varepsilon(x)\alpha(m) \\ &= x\,\mathrm{ev}(\alpha \otimes m)\end{aligned}$$

となるから，線形写像 $\mathrm{ev} : M^* \otimes M \to \Bbbk$ は H 準同型．

M が有限次元ベクトル空間であるとき，余評価函数は合成 $\Bbbk \to \mathrm{End}(M) \to M \otimes M^*$ と一致する．線形写像 $\mathrm{End}(M) \to M \otimes M^*$ は **PROPOSITION 2.1.2** によって H 準同型となる．もう一方の線形写像 $\eta : \Bbbk \to \mathrm{End}(M)$ も，各 $x \in H$ と $m \in M$ に対して

$$\begin{aligned}(x\eta(1))(m) = (x\,\mathrm{id})(m) &= (\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta(x))m \\ &= \varepsilon(x)m \\ &= \eta(x \cdot 1)m\end{aligned}$$

となるから H 準同型である．よって，余評価函数は H 準同型．

合成については，可換図式

$$\begin{tikzcd} N \otimes M^* \otimes M \otimes L^* \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d] & N \otimes L^* \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(M, N) \otimes \mathrm{Hom}(L, M) \arrow[r, "\circ"'] & \mathrm{Hom}(L, N) \end{tikzcd}$$

から分かる． □

§ 2.2 余加群

余代数のときと同じように，余加群とは加群の構造射の向きを反転させたものである．

DEFINITION 2.2.1

余代数 C 上の**左余加群**（*left comodule*）とは，ベクトル空間 M と線形写像 $\Delta_M : M \to C \otimes M$ であって，可換図式

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes M & C \otimes M \arrow[l, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] \\
C \otimes M \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\Delta_M"] & M \arrow[l, "\Delta_M"] \arrow[u, "\Delta_M"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes M & C \otimes M \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \\
& M \arrow[ul, equal] \arrow[u, "\Delta_M"']
\end{tikzcd}$$

を満たすもののことである．

同様に，**右 C 余加群**（*right C-comodule*）が線形写像 $\Delta_M : M \to M \otimes C$ によって定義される．

左 C 余加群の間の線形写像 $f : M \to N$ は等式 $(\mathrm{id}\otimes f) \circ \Delta_M = \Delta_N \circ f$ を満たすとき，**C 準同型**（*C-homomorphism*）と呼ばれる．

また，左 C 余加群 M の部分空間 $N \subset M$ は，包含関係 $\Delta_M(N) \subset C \otimes N$ を満たすとき，**部分 C 余加群**（*C-submodule*）と呼ばれる．

右余加群についても同様に，C 準同型と部分 C 余加群が定義される．

Example 2.2.1

i）C を余代数，M を右 C 余加群とすると，$\Delta_M^{\mathrm{op}} := \tau \circ \Delta_M$ によって線形写像 $\Delta_M^{\mathrm{op}} : M \to C^{\mathrm{cop}} \otimes M$ が定まる．これによって，ベクトル空間 M は左 C^{cop} 余加群となる．ただし一般に，線形写像 f について等式 $(\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ \tau = (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes\tau) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes f)$ および $(\mathrm{id}\otimes\tau) \circ (\mathrm{id}\otimes f) \circ \tau = (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes\tau) \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) \circ (f \otimes \mathrm{id})$ が成り立つことに注意せよ．

これによって右 C 余加群と左 C^{cop} 余加群を同一視できる．

ii）左 $\Bbbk$ 余加群とは，$\Bbbk$ 上のベクトル空間に他ならない．

iii）C，C' を余代数とし，M を左 C 余加群とする．余代数準同型 $f : C \to C'$ が存在すれば，合成 $\Delta'_M := (f \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_M$ によってベクトル空間 M は左 C' 余加群となる．実際，余代数準同型の定義から

$$\begin{aligned}
(\Delta' \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta'_M &= ((\Delta' \circ f) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_M \\
&= (f \otimes f \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_M \\
&= (f \otimes f \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes\Delta_M) \circ \Delta_M \\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta'_M) \circ \Delta'_M, \\
(\varepsilon' \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta'_M &= ((\varepsilon' \circ f) \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_M \\
&= (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_M = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

となる．

iv）C を余代数，M を左 C 余加群とする．このとき，線形写像 $\mu_M^* : M^* \otimes C^* \to M^*$ を

$$\mu_M^*(\alpha \otimes \beta) := (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta_M^{\mathrm{op}} \quad (\alpha \in M^*, \beta \in C^*)$$

で定義すれば，双対空間 M^* は右 C^* 加群となる．

v）A を有限次元代数，M を有限次元左 A 加群とする．このとき，線形写像 $\Delta_M^* : M^* \to M^* \otimes A^*$ を

$$\Delta_M^*(\alpha) := \alpha \circ \mu^{\mathrm{op}} \quad (\alpha \in M^*)$$

で定義すれば，双対空間 M^* は右 A^* 余加群となる．

vi）C を余代数，V をベクトル空間とするとき，テンソル空間 $C\otimes V$ は線形写像 $\Delta\otimes\mathrm{id}\colon C\otimes V\to C\otimes C\otimes V$ によって自由左 C 余加群となる．

さて，代数上の加群の場合と同じように，テンソル余加群を考えよう．

B を双代数とする．左 B 余加群 M，N に対して，テンソル空間 $M\otimes N$ は自然に左 $B\otimes B$ 加群となる：

$$M\otimes N\xrightarrow{\Delta_M\otimes\Delta_N}B\otimes M\otimes B\otimes N\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id}}B\otimes B\otimes M\otimes N.$$

従って，余代数準同型 $\mu\colon B\otimes B\to B$ によってテンソル空間 $M\otimes N$ は左 B 余加群となる．

また，ベクトル空間 M は余代数準同型 $\eta\colon\Bbbk\to B$ によって自明な左 B 余加群の構造を得る：

$$\Delta_M(m)\coloneqq\eta(1)\otimes m\quad(m\in M).$$

Proposition 2.2.1

B を双代数，L，M，N を左 B 余加群とする．また，ベクトル空間 $\Bbbk$ を自明な左 B 加群と見なす．このとき，次の自然な B 同型が成り立つ：

$$(L\otimes M)\otimes N\cong L\otimes(M\otimes N),\quad \Bbbk\otimes M\cong M\cong M\otimes\Bbbk.$$

さらに，双代数 B が可換ならば $M\otimes N\cong N\otimes M$ という自然な B 同型も成り立つ．

Proof. 結合律と単位律からすぐに従う． □

References

[1] Christian Kassel. *Quantum Groups*. Springer, 1995.

[2] 阿部英一. ホップ代数. 岩波書店, 2017.

[3] 神保道夫. 量子群とヤン・バクスター方程式. 丸善出版, 2012.